

Elaboració d'un mapa virtual de la Lluna

Irina Pi Jaumà

IES Jaume Vicens Vives, curs 2012-2013

Grup: 2n de Batxillerat A

Tutoria: Maria Lluïsa González Vall-llovera

Agraïments

Aquest treball no hagués estat possible sense l'ajuda de moltes persones, les quals han mostrat des del primer moment molt d'interès i ganes perquè jo pogués complir tots els meus objectius.

En primer lloc, agrair enormement a l'Agrupació Astronòmica de Girona que em facilitessin el seu telescopi en l'Observatori Can Roig de Llagostera. Agrair principalment la seva dedicació a Rafael Balaguer Rosa, president d'aquesta agrupació, que m'ha ajudat durant tot el treball i m'ha guiat quan m'he sentit perduda. Gràcies també a Jordi Sesé Puértolas, tècnic responsable de la pàgina web de l'agrupació, el qual m'ha ensenyat a configurar i editar el meu mapa lunar. I agrair també a Josep Maria Petit Prats, operador de l'observatori, atès que sense la seva ajuda les observacions no haguessin estat possibles.

Agrair també com no, la valuosa col·laboració de la meva tutora, Maria Lluïsa González Valllovera, qui m'ha guiat, animat, orientat i recolzat en tot moment. I sobretot, per aconseguir que mitjançant el càlcul i l'aprofundiment i resolució de les fórmules, hagi gaudit molt en aquest treball.

No puc oblidar la meva família, els quals m'han acompanyat fins al centre astronòmic en les nits de les observacions, m'han animat i han cregut en mi durant tota la realització del treball. Han estat, sens dubte, un suport imprescindible.

I finalment, gràcies a aquest nostre satèl·lit, la Lluna, per existir, i a tots els científics que amb els seus descobriments i estudis m'han despertat la curiositat per aprendre una mica més d'aquest nostre meravellós Univers.

Índex de continguts

1. <u>Introducció</u>	5
2. <u>Objectius</u>	6
3. <u>Metodologia</u>	7
3.1. <u>Fonaments teòrics</u>	7
3.2. <u>Captura i tractament de les imatges</u>	7
3.3. <u>Elaboració d'una pàgina web</u>	8
3.4. <u>Mesuraments</u>	8
4. <u>Fonaments teòrics</u>	9
4.1. <u>La Lluna</u>	9
4.1.1. <u>Característiques generals</u>	9
4.1.2. <u>Formació</u>	10
4.1.3. <u>Estructura</u>	12
4.1.4. <u>Atmosfera</u>	12
4.1.5. <u>Superfície</u>	13
4.1.6. <u>Òrbita</u>	14
4.1.7. <u>Fases</u>	16
4.2. <u>El telescopi</u>	17
4.2.1. <u>Tipus de telescopis</u>	17
4.2.2. <u>Formació d'imatges en el telescopi</u>	18
4.3. <u>Tecnologia digital</u>	19
4.3.1. <u>Dispositiu de càrrega acoblada (CCD)</u>	19
5. <u>Captura i tractament de les imatges</u>	20
5.1. <u>Captura</u>	20
5.2. <u>Tractament</u>	21
6. <u>Elaboració de la pàgina web</u>	24
7. <u>Mesuraments</u>	27
7.1. <u>Altura dels relleus: dos mètodes possibles</u>	27
7.2. <u>Factor d'escala</u>	30
7.3. <u>Ombra i distància al terminador aparents</u>	32
7.4. <u>Ombra i distància al terminador reals</u>	35
7.5. <u>Càlcul de l'altura dels relleus</u>	36
7.6. <u>Exemple del cràter Tycho</u>	40
8. <u>Conclusions</u>	44
9. <u>Bibliografia</u>	48
9.1. <u>Pàgines web</u>	48
9.2. <u>Descàrregues</u>	50
9.3. <u>Llibres i revistes</u>	50
10. <u>Annexos</u>	51
10.1. <u>Annex 1: Complement d'òptica</u>	51
10.2. <u>Annex 2: Efecte fotoelèctric</u>	55
10.3. <u>Annex 3: Fotografies de la Lluna per parts</u>	56
10.4. <u>Annex 4: Situació dels cràters calculats</u>	58
10.5. <u>Annex 5: Millora 1 - Curvatura de la Lluna</u>	59
10.6. <u>Annex 6: Millora 2 - Angle Terra-Lluna-Sol</u>	61

1. Introducció

Sempre m'ha fascinat l'Univers i el món en el qual vivim. Un Univers sorprenent, estrany i desconegut però alhora meravellós. No és apassionant que veiem puntets de llum en el cel que en realitat són estels a milers d'anys llum? I que aquesta llum que veiem l'emeteren els estels en un passat remot i que potser moltes d'elles ja no existeixen? O no és inimaginable que l'Univers s'estigui expandint i no sapiguem què passarà en un futur? Podríem formular tantes preguntes sense resposta! I és que ocupem un lloc tan insignificant en aquest immens Univers que intentem donar una explicació i comprendre tots els seus fenòmens per entendre també la nostra situació i el perquè estem aquí. Veritablement, en aquest infinit Univers, no hi ha vida en cap altre lloc?

Em deixa tan intrigada el món de l'astronomia, que sempre he pensat que voldria fer un treball sobre aquest tema. Així que en la següent monografia m'he centrat en el cos celeste que millor coneixem, a part del nostre propi planeta Terra, l'únic que l'home ha visitat, el cos més proper a nosaltres i que ens il·lumina en les nits fosques: la nostra veïna, la Lluna.

La Lluna és l'únic satèl·lit natural de la Terra i l'únic les característiques del qual podem observar amb una certa precisió a simple vista. Però no és, ni molt menys, l'únic satèl·lit de l'Univers, sinó que avui dia sabem per exemple que tots els altres planetes del Sistema Solar, excepte Mercuri i Venus, tenen almenys una lluna. Molts poetes i artistes s'han inspirat al llarg de la història en la nostra Lluna, ja que és d'una gran bellesa. Doncs imaginem-nos com de bell podria ser l'escena de veure en el cel unes cinquanta llunes, com tenen, cadascun, Saturn i Júpiter.

Així doncs, encara que no tinguem cinquanta llunes, això fa més especial la nostra, i personalment parlant, aquesta sempre m'ha tingut captivada. Per la seva bellesa, la seva llum, les diferents formes que veiem d'ella des de la Terra, les seves històries i mites, la seva influència sobre nosaltres... Per això en aquest treball vull resoldre alguns dels misteris que aquesta m'inspira, així com -a partir d'observacions amb telescopi- poder configurar un mapa lunar i contemplar la bellesa d'aquest magnífic satèl·lit amb molta més precisió que a simple vista.

2. Objectius

Els objectius que m'he proposat en el meu treball són:

- Introduir-me al món de l'astronomia i aprendre com funciona un telescopi.
- Introduir-me en l'ús d'un programa adequat per transformar les imatges òptiques de les observacions de la Lluna en senyals digitals, així com altres programes de tractament de les imatges que em permetran dur a terme el disseny del mapa virtual.

I més especialment:

- **Configurar el mapa de la Lluna a partir de les imatges extretes de les observacions directes amb un telescopi.**
- **Elaborar una pàgina web amb el mapa lunar i tota la informació possible dels seus cràters, mars o muntanyes.**
- **Verificar l'altura d'alguns dels relleus més característics de la Lluna**

El meu principal dubte quan em vaig fixar aquests objectius era si seria realment possible mesurar les altures dels cràters lunars a partir simplement d'unes fotografies, i si els resultats s'aproximaran als reals.

3. Metodologia

El procés de realització d'aquest treball el podríem dividir en quatre etapes: cerca teòrica; observacions amb el telescopi i tractament de les imatges; configuració del mapa virtual lunar i elaboració d'una pàgina web; i finalment, càlcul de l'altura d'alguns cràters o muntanyes d'aquest satèl·lit.

3.1. Fonaments teòrics

Per poder fer un estudi o treball sobre qualsevol tema, en primer lloc és necessària una bona base teòrica per ser capaç d'entendre de forma més precisa molts dels aspectes que van sorgint. En el cas de la Lluna, em servirà per poder entendre el seu comportament, la seva estructura física i composició, entre altres. Així que en primer lloc en el meu treball hi consten uns fonaments teòrics de la Lluna, i també de telescopis i de tecnologia digital, necessaris per a l'observació d'aquest satèl·lit. Tota la informació ha estat trobada a les pàgines web o llibres que consten en la bibliografia.

3.2. Captura i tractament de les imatges

En segon lloc, vaig fer totes les observacions de la Lluna en l'Observatori Can Roig de Llagostera, en el qual els membres de l'Agrupació Astronòmica de Girona em presten els seus materials.

Per a la captura de les imatges vaig començar utilitzant un sistema, però certs problemes em van obligar a canviar de mètode. El sistema inicialment previst era fer-ho mitjançant un telescopi model *Takahashi Mewlon 210* de 8 polzades d'obertura (20 cm de diàmetre) que funciona mitjançant miralls, i per tant és de tipus reflector Newtonià. A més, adaptant una càmera *Philips Toucam Pro II* al telescopi, es poden fer observacions a molt més augments que amb el simple ocular (fins a 2000 augments).

La intenció era, amb aquest equip connectat a l'ordinador, i amb el programa *K3CCDTools*¹, que transforma els senyals òptics en senyals digitals, capturar vídeos de parts concretes de la Lluna per, seguidament, amb el programa *RegiStax V6*² fusionar fotogrames i obtenir imatges estàtiques de major qualitat que si aquestes es capturen directament.

El problema va ser que a causa de les turbulències atmosfèriques que es produeixen per la calor de l'estiu, no aconseguíem imatges suficientment nítides que ens proporcionessin

¹ Proporcionat per l'Agrupació Astronòmica de Girona

² De descàrrega gratuïta

una bona qualitat. Per això, després de diversos intents, vam decidir amb els membres de l'Agrupació Astronòmica canviar el mètode i capturar directament imatges estàtiques, ja que a aquest sistema no li afecten tant les turbulències atmosfèriques.

Per a això vam utilitzar un telescopi modelo *Takahashi Toa 150* de 6 polzades d'obertura (uns 15 cm de diàmetre) que funciona mitjançant lents, i per tant és refractor i apocromàtic. També vaig utilitzar una càmera CCD³ *QHY9* adaptada al telescopi i tot això connectat a l'ordinador.

Per capturar les imatges, en aquest cas ho vaig fer amb el programa *Maxim DL Pro Version 5*⁴, el qual ens permet configurar el filtre per obtenir imatges de més qualitat. Finalment, després d'escollir les millors imatges, el programa *Photoshop*⁵ és ideal per retocar-les, podent canviar per exemple la brillantor o el contrast.

3.3. *Elaboració d'una pàgina web*

Una vegada obtingudes les imatges de la Lluna i seleccionades les millors (una en quart creixent i una en quart minvant) vaig anar identificant els principals cràters, mars i muntanyes de la superfície lunar mitjançant la utilització del *Virtual Moon Atlas*⁶. Alhora, amb el programa *Celestia*⁷ vaig obtenir les constants lunars que necessitava.

Seguidament, amb tot això, vaig anar configurant el mapa virtual lunar i vaig elaborar una pàgina web, per a la qual cosa vaig utilitzar dos altres programes: el *Adobe Dreamweaver*⁸, que em va ajudar en l'edició, construcció i disseny de la pàgina web, i el *Image Ready*⁹, que em va permetre convertir parts d'una imatge en enllaços de la pàgina web.

3.4. *Mesuraments*

Finalment, vaig calcular l'altura d'alguns cràters i per a això, en primer lloc, vaig haver de mesurar l'ombra en la fotografia de cadascun d'aquests accidents geogràfics (per fer-ho amb menys incertesa, vaig utilitzar el *Photoshop*). A continuació, vaig calcular l'altura real dels relleus, utilitzant simples càlculs de trigonometria, basant-nos en els triangles semblants.

³ Veure Tecnologia Digital

⁴ Proporcionat per l'Agrupació Astronòmica de Girona

⁵ Obtenció pròpia

⁶ De descàrrega gratuïta

⁷ De descàrrega gratuïta

⁸ Obtenció pròpia

⁹ Obtenció pròpia

4. Fonaments teòrics

4.1. La Lluna

La Lluna és l'únic satèl·lit natural de la Terra, és a dir, l'únic cos celeste no fabricat per l'home que orbita al voltant del nostre planeta. Des de la Terra veiem que brilla, però això és a causa que reflecteix la llum del Sol, no té llum pròpia (quan hi ha Lluna plena, es reflecteix un 7% de la llum solar). És un cos esfèric, sòlid (de roca freda), i amb una atmosfera molt fràgil ja que la força de gravetat no és suficientment forta per subjectar una atmosfera més gran. Antigament va haver-hi activitat volcànica, però avui dia hi ha molt poca activitat, a part dels TLP¹⁰. Així que la Lluna és, actualment, un món bastant paralitzat i en principi sense vida, on predominen els colors grisos. Àdhuc això, l'any 2009¹¹ es va fer una troballa de restes d'aigua en la Lluna, encara que s'ha d'investigar més profundament.

Quant a la mida, és relativament gran ja que és el cinquè satèl·lit més gran del Sistema Solar, i en comparació del seu planeta es podria arribar a dir que es tracta d'un sistema binari Terra-Lluna. Això és així perquè la Lluna és 1/81 vegades la massa de la Terra, una dada considerablement gran comparant-ho per exemple amb la massa de Ganímedes¹² que és 1/12500 la de Júpiter.

És a més el primer astre on ha arribat l'home, ja que és també el més proper. Concretament, a la velocitat de la llum¹³ només trigariem 1,28 segons en arribar-hi des de la Terra. És per això que la força de gravetat de la Lluna influeix també al nostre planeta, provocant per exemple les marees.

4.1.1. Característiques generals

El nostre satèl·lit té unes característiques bastant diferents a les de la Terra, ja que per exemple, té una grandària d'un quart del diàmetre del nostre planeta i 1/81 de la seva massa. Això provoca que la seva força de la gravetat sigui una sisena part que la de la Terra, per la qual cosa allà els objectes pesarien sis vegades menys i caurien a una velocitat sis vegades menor. A més, això fa que tingui una atmosfera molt fràgil, motiu pel qual

¹⁰ Els TLP (Transient Lunar Phenomena) són resplendors i enfosquiments en la superfície lunar, causats per petites perturbacions i terratrèmols que alliberen gasos del seu interior.

¹¹ El 9 d'octubre de 2009, la NASA va estavellar la Sonda LCROSS (Lunar Crater Observation and Sensing Satellite) i el seu coet Centauro en el fons del cràter Cabeus (un cràter permanentment ombrejat en el pol sud de la Lluna). L'impacte del coet va aixecar matèria, entre ella molècules d'aigua.

¹² Satèl·lit més gran de Júpiter i del Sistema Solar

¹³ Velocitat de la llum (c): 299.792.458 m·s⁻¹ (valor exacte)

contínuament cauen meteorits en la seva superfície, ja que no existeix una capa protectora, la qual cosa li fa tenir molts cràters i mars.

A continuació presento una taula amb les principals constants de la Lluna i de la Terra, perquè es puguin comparar.

	Lluna	Terra
Massa (kg)	$7,349 \cdot 10^{22}$	$5,974 \cdot 10^{24}$ (81 vegades més gran)
Diàmetre equatorial (km)	3475	12.756 (4 vegades més gran)
Densitat mitjana (kg/m³)	3340	5515
Gravetat (m/s²)	1,62	9,81 (6 vegades més gran)
Distància mitjana de la Terra (km)	384.400 km	--
Temperatura en la superfície (°C)	-150 a 120	15
Període de rotació	27,32 dies	23,93 hores
Òrbita al voltant de la Terra	27,32 dies	--

Taula 1: Principals constants de la Lluna i la Terra

4.1.2. Formació

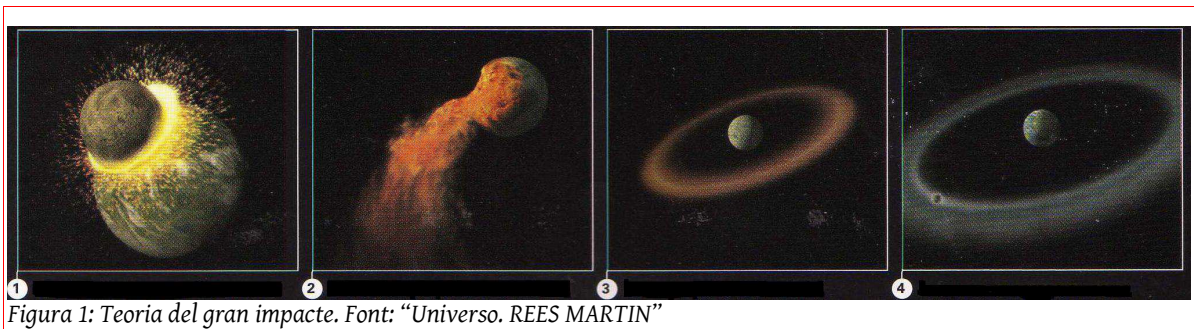
Hi ha molts dubtes sobre com es va formar la Lluna, fins al punt que hi ha quatre teories diferents:

La **teoria de fissió** defensa que la Terra i la Lluna originàriament eren un mateix cos que rotava molt més de pressa que actualment, i que a causa d'aquesta gran velocitat de rotació, es va formar una protuberància. Més tard aquesta va ser expulsada per la força centrífuga i es va quedar en òrbita al voltant de la Terra, formant-se així la Lluna

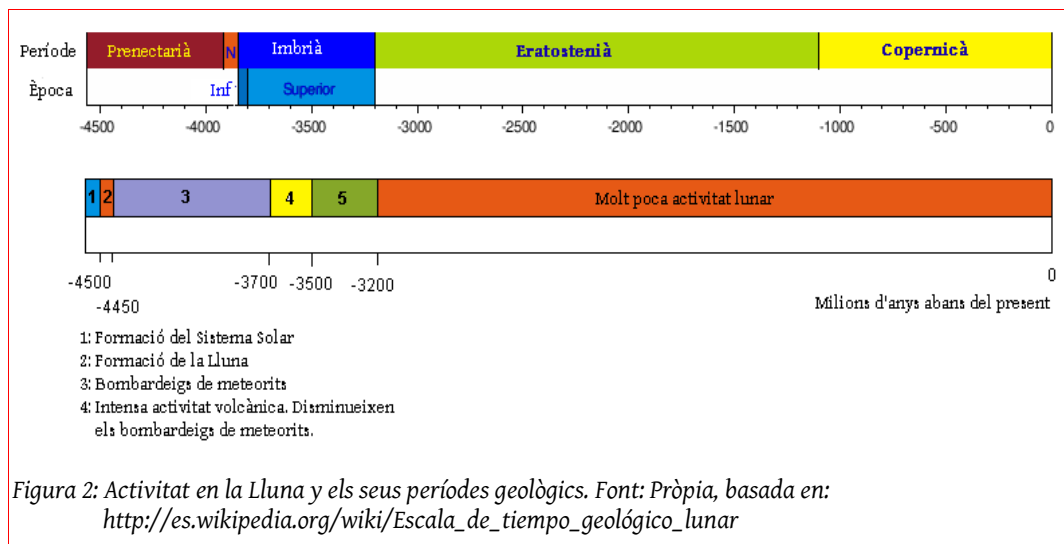
La **teoria de la captura** suposa que la Lluna era un astre similar a un planeta independent que s'havia creat en un altre lloc i moment diferents als de la Terra. Es creu que la Lluna tenia una òrbita molt excèntrica al voltant del Sol i que va ser alterada per les forces de la gravetat dels planetes, fins al punt que va quedar capturada per la gravetat de la Terra i fixada en òrbita al seu voltant

La **teoria d'acreció binària** diu que Terra i Lluna van ser creades juntes, a partir de la mateixa massa de matèria original que estava al voltant del Sol i en el mateix moment i zona del Sistema Solar.

Finalment la **teoria del gran impacte**, que és la més acceptada pels astrònoms actualment. Se suposa que un asteroide d'una grandària similar a Mart, anomenat Theia, va col·lisionar amb la Terra uns 50 milions d'anys després de la formació del Sistema Solar, fa 4.500 milions d'anys¹⁴ (fig.1.1). L'impacte va ser tan fort que es va fondre part de la roca de l'escorça dels dos cossos, va esquitxar a l'espai i va formar un enorme núvol de gas, pols i roca (fig.1.2) que va trobar una òrbita al voltant de la Terra (fig.1.3). Amb el temps, el núvol es va refredar ràpidament, i a causa dels impactes entre roques es va formar un únic cos, la Lluna (fig.1.4). La següent figura és un esquema d'aquesta teoria:



Els relleus lunars es van formar a causa de l'activitat de meteorits o similars, i depenent de l'època en què es van crear, es distingeix cadascun d'ells en diferents períodes geològics lunars. A continuació veiem un eix cronològic d'aquests:



¹⁴ Tais W. Dahl i el seu professor David J. Stevenson, van realitzar una recerca com a tesi en geofísica a la Universitat de Copenhagen, per determinar exactament l'edat de la Lluna i la Terra. Ho van fer utilitzant els isotops de tungstè, que poden revelar si els nuclis de ferro i les seves superfícies de pedra es van barrejar durant la col·lisió. El resultat va ser que Lluna i Terra es van crear fa 4.417 milions d'anys, 150 milions d'anys més tard del que s'havia imaginat.

4.1.3. Estructura

Troblem tres capes diferents en l'estructura interna de la Lluna: l'escorça, el mantell i el nucli.

L'**escorça** és la capa exterior i té un gruix de 48 km en la cara visible i de 74 km en la cara oculta, encara que varia molt depenent de les esquerdes que hi ha en cada zona. És sòlida i



Figura 3: Estructura interna de la Lluna.
Font: <http://www.odiseacosmica.com/2011/01/nuevo-analisis-revela-la-estructura.html>

està formada per anortita, una roca similar al granit i rica en calci que està composta bàsicament de plagioclasa¹⁵. Altres elements que hi trobem són: oxigen, silici, magnesi, ferro, calci i alumini.

El **mantell** superior és sòlid, rígid i estable. La temperatura augmenta amb la profunditat, i als 1000 km sota l'escorça la roca es comença a fondre parcialment. Aquesta capa està composta bàsicament d'olivina. També hi ha ortopiroxè, clinopiroxè i ilmenita.

Finalment es creu que hi ha un **nucli** petit de ferro a causa de l'alta densitat de la Lluna. Se suposa que té un radi d'uns 350 km i que es troba parcialment fos a causa de les altes temperatures, d'uns 1100°C. Tot i això, es

necessiten més proves per confirmar l'existència d'un nucli metàl·lic.

4.1.4. Atmosfera

L'atmosfera de la Lluna és molt fràgil i fina, d'una massa total d'uns 10.000 kg i no exerceix totalment de capa protectora (ja que per exemple no va impedir els bombardejos de meteorits). La gravetat de la Lluna no és suficientment potent com per mantenir una atmosfera més gran, i per això la seva atmosfera es dissipa contínuament; no obstant això, el vent solar la reposa. Està composta bàsicament de neó (29%), hidrogen (22,6%), heli (25,8%), argó (20,6%) i altres.

¹⁵ La plagioclasa (del grup dels feldspats) és un conjunt de minerals. Entre ells predominen els elements de silici, alumini, calci i oxigen.

4.1.5. Superfície

La superfície lunar està coberta de pols a causa dels meteorits i d'una porosa capa de detritus de diferents grandàries. El sòl (o regolita¹⁶) és un jaç de roca fina molt fragmentat, i com que no hi ha vent ni pluja és molt difícil la dispersió dels materials i la seva erosió. Avui dia, quan mirem el nostre satèl·lit des de la Terra, podem veure en la seva superfície zones brillants i algunes taques fosques. Això és a causa que existeixen diferents tipus de relleus, creats fa molts milions d'anys.

Les zones brillants del relleu lunar (veure figura 4) s'anomenen continents o *terrae* i és on predominen una gran quantitat de **cràters**. Aquests es van formar per bombardejos de meteorits durant els primers 750 milions d'anys de vida de la Lluna. Els meteorits arribaven a grans velocitats ja que no hi havia una atmosfera que els ho impedís, esquerdant així en gran mesura el relleu lunar. Hi ha moltíssims cràters, tals com Tycho o Clavius, que oscil·len dels pocs centímetres als 200 km de diàmetre. Els que es veuen més brillants és perquè són producte d'impactes més recents.

Les grans taques fosques del nostre satèl·lit són denominades **mars** (del llatí *maria*) ja que antigament els grecs creien que en aquestes zones hi havia aigua líquida. Aquesta creença va perdurar fins al s.XVII. Actualment sabem que fa uns 3.500 milions d'anys, va començar un període d'intensa activitat volcànica i van disminuir els bombardejos d'asteroides. La lava dels volcans es va infiltrar per les esquerdes de l'escorça fins a uns 100 km de profunditat i va emplenar els cràters més profunds. Una vegada es va solidificar la lava, va formar les fosques zones basàltiques, els mars. Aquests poden tenir diferents formes, circular o irregular, i es poden ramificar en golfs, pantans o llacs. Exemples són el Mar de la Tranquil·litat¹⁷, el Mar de la Serenitat i el Mar de les Crisis.



Figura 4: Lluna en quart creixent. La zona del terminador es veu plena de cràters i relleus, i també s'observen els mars Fecunditatis, Tranquillitatis, Serenitatis i Crisium, entre altres.

Font: http://www.astrofacil.com/Que_puedo_ver_hoy/10_Octubre/Prismaticos/prismaticos_01.html

¹⁶ La regolita és la capa de materials no consolidats, alterats, que està per sobre d'una capa rociosa, sòlida i inalterable. Fa olor a pólvora, i és per això que en la missió Apol·lo, a la tornada, els astronautes creien que es cremava alguna cosa.

¹⁷ L'Apol·lo XI va aterrar en el Mar de la Tranquil·litat.

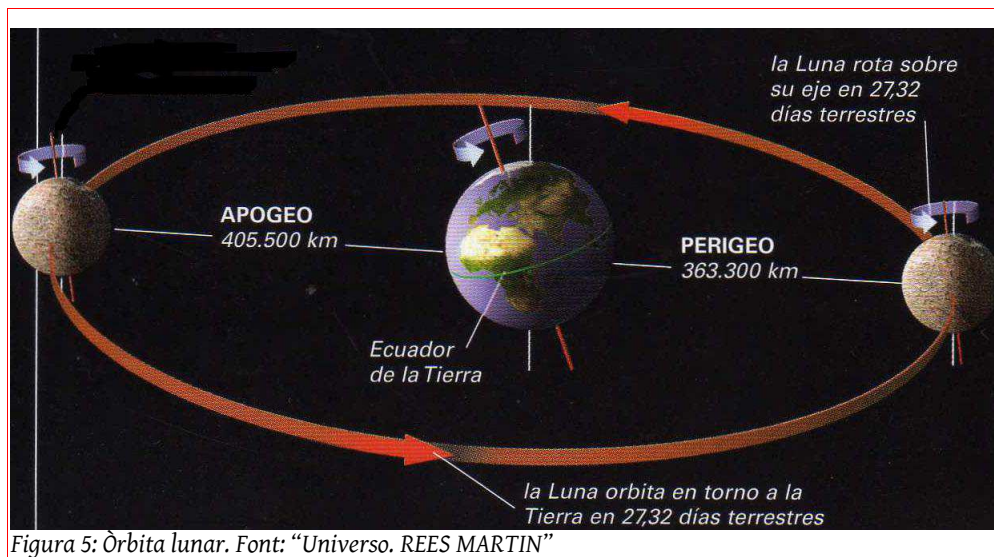
En el relleu lunar també existeixen cadenes de **muntanyes** com els Alps i els Apenins (igual que a la Terra), i de vegades aquestes muntanyes envolten els mars. Van ser igualment formades per impactes de meteorits.

Tots aquests relleus són els que he observat amb el telescopi, fotografiant cadascun d'ells amb exactitud per poder-los identificar i construir el mapa lunar.

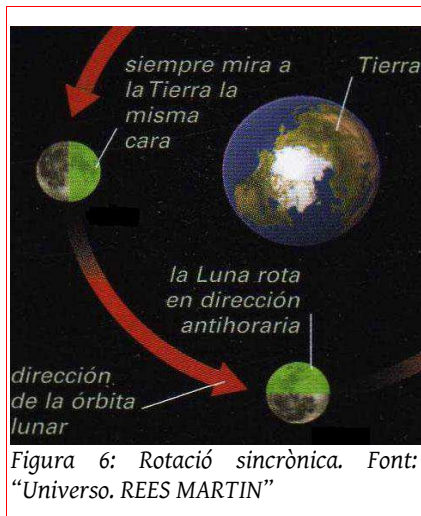
D'altra banda, quan mirem la Lluna, veiem que hi ha una clara divisió entre la part il·luminada i la no il·luminada, la divisió entre el dia i la nit lunars. Aquesta línia es diu **terminador**. A causa de la llum del sol, en aquesta part les ombres s'allarguen i tots els accidents geogràfics d'aquesta zona s'aprecien molt millor. És per això que moltes de les observacions que jo vaig a fer amb el telescopi seran d'aquesta zona.

4.1.6. Òrbita

L'òrbita de la Lluna és la trajectòria que segueix el nostre satèl·lit al voltant de la Terra. Aquesta òrbita és el·líptica i en sentit antihorari, per la qual cosa la distància entre els dos cossos varia. En el punt més allunyat (*apogeu*) la Lluna està un 10% més lluny que en el punt més proper (*perigeu*).



La Lluna tarda 27,32 dies terrestres a completar la seva òrbita al voltant de la Terra (el que anomenem mes sideral), exactament igual que el que triga en rotar sobre el seu propi eix. A això se li'n diu **rotació sincrònica** (sincronització de rotació i translació). És per això que la part de la Lluna que està mirant a la Terra sempre és la mateixa, la cara visible, en



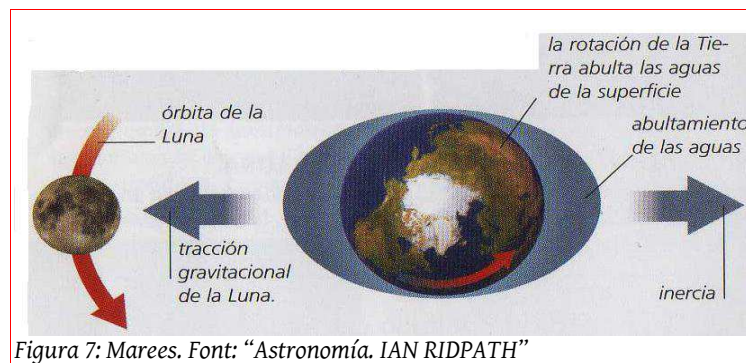
contraposició a la zona que no veiem mai, que es diu cara oculta.

De totes maneres això no és del tot cert, ja que diverses perturbacions influeixen en l'òrbita lunar, per exemple les **libracions**, moviments d'oscil·lació del disc lunar. Per això, en lloc del 50% teòric que hauríem de veure de la Lluna, un observador des de la Terra pot arribar a veure el 59% de la seva superfície.

Com que l'òrbita Terra-Lluna està una mica inclinada respecte al plànol de l'òrbita Terra-Sol (5°9' de mitjana), no és fàcil que es produeixin eclipsis ja que s'han de tallar les seves òrbites. En la trajectòria de la Lluna hi ha

només dos punts en què els eclipsis són possibles, anomenats **nodes**.

No obstant això, a causa de la influència del Sol i la Terra en la Lluna, la seva òrbita no és una el·lipse perfecta. D'altra banda, la influència de la Lluna sobre la Terra és la causa de les **marees**, que al seu torn, provoquen que la Lluna s'allunyi de la Terra aproximadament 38mm per any. La Lluna causa les marees "deformant" la Terra a causa de l'atracció gravitatòria que exerceix sobre ella, tot i que aquesta deformació solament es pot observar en els oceans perquè en ser líquid és més fàcil de mobilitzar. Al mateix temps les marees tiren una mica de la Lluna, apropant-la a la Terra, i aquest augment en la seva velocitat orbital és la que l'allunya de nosaltres.



Finalment cal diferenciar entre els períodes lunars. Com hem dit el **mes sideral** és el que triga la Lluna a completar una volta a la Terra, sempre considerant el gir respecte al fons estel·lar (27,32 dies terrestres). No obstant, el període entre una fase nova i la següent és de 29,53 dies terrestres (**mes sinòdic**), ja que hem de tenir en compte el gir de la Terra respecte al Sol. Això és degut a què durant cada revolució de la Lluna, la Terra avança uns 27° respecte la seva òrbita al voltant del Sol.

4.1.7. Fases

Les fases de la Lluna depenen de la seva posició respecte al Sol. La llum del Sol il·lumina sempre una meitat de la Lluna, però com que aquesta gira sobre el seu propi eix i en òrbita amb la Terra, aquesta meitat il·luminada va canviant. De vegades està il·luminada per complet, unes altres parcialment i unes altres en diferents formes, que coneixem com a **fases lunars**, el cicle del qual es completa cada 29,5 dies.

Quan la Lluna està entre el Sol i la Terra, la cara que mira a la Terra està completament fosca, és la que anomenem **Lluna nova**. A mesura que la Lluna es mou en òrbita amb la Terra, la zona que veiem és cada vegada major, per la qual cosa està en **Lluna creixent**, fins que està completament il·luminada, la **Lluna plena**. Després torna a disminuir, l'anomenada **Lluna minvant**, i arriba una altra vegada a Lluna nova, havent completat un cicle lunar. Aquest fet s'entén molt bé en el següent dibuix:

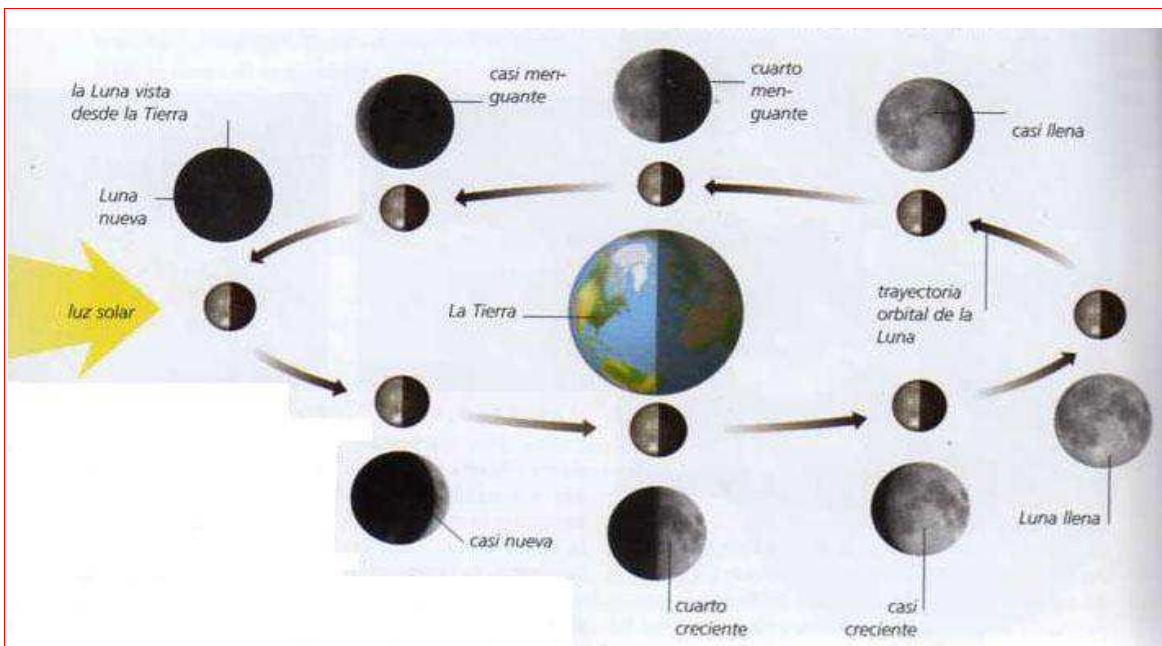


Figura 8: Fases lunars. Font: "Astronomía. IAN RIDPATH"

4.2. El telescopi

El telescopi és un instrument que va revolucionar el món de l'astronomia. Des que es van millorar els cristalls en el segle XVII, es van fer grans aportacions, començant per Hans Lippershey¹⁸, reconegut com el creador dels dissenys per al primer telescopi pràctic. Galileu Galilei¹⁹, a principis de segle, va ser el primer que el va utilitzar per fer recerca científica. Així doncs, aquest instrument ens permet fer observacions de cossos celestes molt llunyans i amb prou feines visibles a simple vista.

4.2.1. Tipus de telescopis

Els dos tipus de telescopis més populars són els refractors i els reflectors.

Els **telescopis refractors** utilitzen lents per concentrar i enfocar la llum en un punt focal. Existeixen dos tipus: els **acromàtics** i els **apocromàtics**. Els acromàtics consten de dues lents en la part frontal del tub, però la llum blava no aconsegueix ser enfocada en el mateix punt focal que les altres, causant un fenomen que es diu *aberració cromàtica*. Per corregir aquest fenomen s'utilitzen els apocromàtics, que enfoquen totes les longituds d'ona, i per conseqüent, tots els tipus de llum. Estan compostats per tres lents en lloc de dues i en una d'elles hi ha fluorita (un mineral).

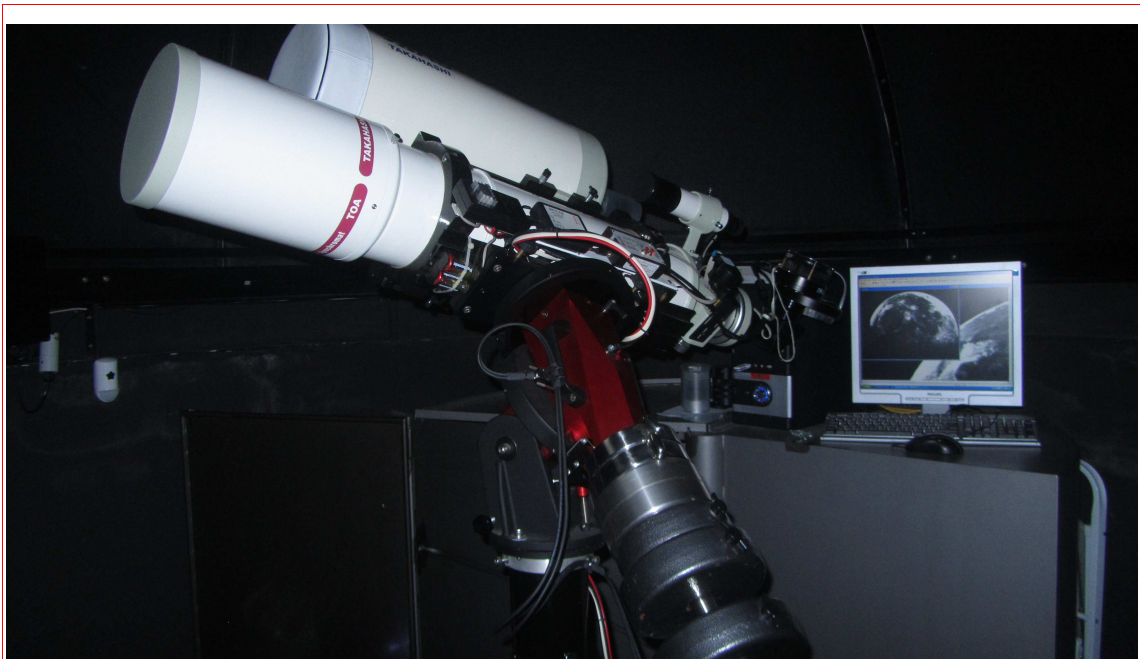


Figura 9: Observatori de Llagostera. Telescopi refractor apocromàtic del model Takahashi Toa 150. Font: Pròpia

¹⁸ Hans Lippershey va néixer el 1570 a Wesel (Alemanya) i va morir el 1619. Va ser científic, inventor, òptic i astrònom.

¹⁹ Galileu Galilei va néixer a Pisa (Itàlia) el 15 de febrer de 1564, i va morir a Florència (Itàlia) el 8 de gener de 1642. Va ser astrònom, filòsof, matemàtic i físic, i va fer grans aportacions a l'evolució científica.

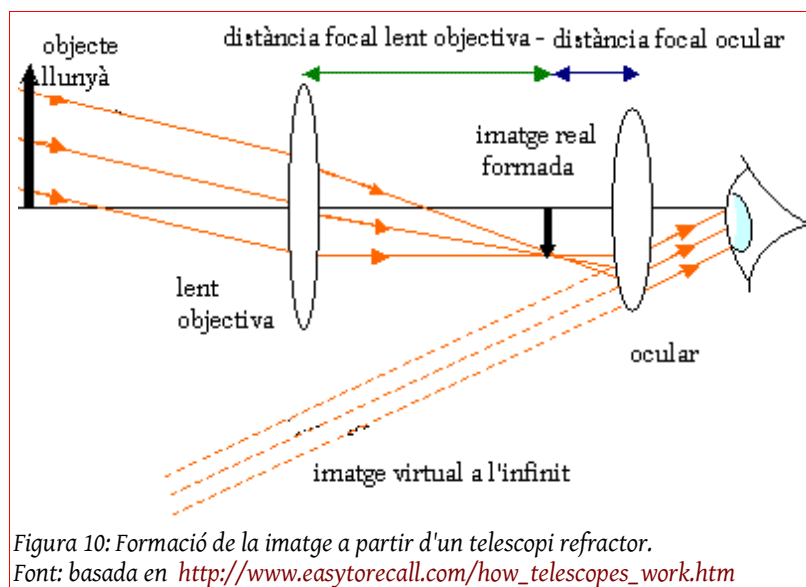
Els **telescopis reflectors** (o Newtonians²⁰) combinen miralls en lloc de lents per concentrar i enfocar la llum i formar les imatges. És actualment el disseny que més s'utilitza ja que soluciona molts dels problemes citats anteriorment. Tot i això s'usa d'una manera amateur, els observatoris professionals utilitzen un disseny més complex.

Jo inicialment vaig usar un telescopi reflector, però aquest captava molt les turbulències atmosfèriques, i això m'impedia capturar imatges de qualitat. Per això, finalment vaig acabar utilitzant un refractor apocromàtic.

4.2.2. Formació d'imatges en el telescopi

En aquest cas, encara que vaig començar utilitzant un telescopi reflector Newtonià, únicament explicaré el model que vaig fer servir finalment per a les captures, el telescopi **refractor apocromàtic**, i la formació de la seva imatge quan l'objecte està molt llunyà (cas de la Lluna). Aquest telescopi està compost per tres lents, una d'elles és la que conté fluorita per corregir l'aberració cromàtica, i amb les altres dues es forma la imatge.

La primera lent, anomenada **lent objectiva**, recull la llum que procedeix de l'objecte i produeix la imatge real. L'altra lent, anomenada **ocular**, engrandeix aquesta imatge real. La lent objectiva inverteix la imatge però l'ocular no, per la qual cosa tindrem una imatge real, menor i invertida. Això ho podem observar en la següent figura, encara que en realitat l'esquema és d'un refractor acromàtic. En un d'apocromàtic, s'afegiria una lent amb fluorita que faria que la llum blava també s'enfoqués:



²⁰ El telescopi de reflexió va ser inventat per Isaac Newton l'any 1668. Els telescopis Newtonians són formats per dos miralls i un ocular.

4.3. Tecnologia digital

4.3.1. Dispositiu de càrrega acoblada (CCD)

Un dispositiu de càrrega acoblada o CCD (en anglès Charge-Coupled Device) és un microxip que s'usa per registrar electrònicament una imatge enfocada sobre la seva superfície. És un circuit integrat fet de silici (que és un material semiconductor) format per molts petits condensadors (o cèl·lules fotoelèctriques) junts, anomenats **píxels**. Així doncs, la resolució o detall de la imatge ve donada pel nombre de píxels, quants més píxels hi hagi, més resolució. El que fa el CCD és transformar els senyals òptics en senyals digitals per manipular-los amb la finalitat de transmetre'ls, registrar-los o visualitzar-los en un monitor. Aquest procés és necessari en les observacions que vaig fer amb el telescopi, ja que així veia les imatges digitals directament a l'ordinador. Per tant, el que es fa és acoblar un CCD al telescopi.

Per processar les imatges, el CCD es basa en l'efecte fotoelèctric (veure annex 2). Cada xip té una determinada **eficiència quàntica**, que és la quantitat de fotons que han d'incidir sobre el xip per produir corrent elèctric. Així, quan incideixen els fotons en cada píxel, s'emeten electrons, els quals són directament proporcionals al nombre de fotons. Quants més fotons incideixen, més electrons s'emeten, i més càrrega s'emmagatzema en les anomenades **fontes de potencial**. Seguidament la càrrega recollida en cada píxel es va transferint per les càrregues d'acoblament, primer en paral·lel (registre paral·lel) i després se situen al llarg de cada columna (registro serial). Finalment, els paquets de càrrega es converteixen en voltatge de sortida i després són codificats digitalment. Això es fa així perquè converteix la càrrega en senyal digital a codi binari. A més, també es pot emmagatzemar la informació de la llum en cada píxel, així com la seva posició en la superfície, i aquesta informació serà utilitzada per reconstruir la imatge, ja que cada píxel ha recollit diferents intensitats de llum en diferents parts de la imatge.

Per tant, gràcies a aquest xip podem passar la imatge que veiem de la Lluna a través del telescopi directament a l'ordinador, i així és possible manipular les imatges com vulguem.



Figura 11: CCD.
Font:<http://www.digitalfotored.com/imagendigital/sensorccd.htm>

5. Captura i tractament de les imatges

5.1. Captura

Tal com ja he citat, per obtenir les imatges vaig utilitzar un telescopi model **Takahashi Toa 150** que em va deixar l'Agrupació Astronòmica de Girona a Llagostera. També vaig utilitzar una càmera CCD **QHY9²¹**, i la vaig adaptar al telescopi per poder veure directament les imatges a l'ordinador, la qual cosa a més em va permetre observar la Lluna amb molts més augments. Aquesta tècnica s'anomena "CCD visual", perquè observem la Lluna directament a l'ordinador i no amb l'ocular. A continuació, gràcies al programa **Maxim DL Pro Version 5** (que utilitza un sistema de dispositiu de càrrega acoblada) vaig registrar les imatges que arribaven de parts concretes de la Lluna. Tot seguit explicaré el funcionament d'aquest programa:

En primer lloc hem de configurar les opcions del programa, bàsicament el filtre que li posem. En el nostre cas, en la Lluna creixent vam posar un filtre d'hidrogen alfa (Ha) ja que aquest talla molt la llum i ens presenta l'objecte més enfosquit, la qual cosa ens permet apreciar millor els relleus. En canvi, en la Lluna minvant vam escollir el filtre d'oxigen III (OIII) perquè es veien millor els relleus amb aquest, que deixa passar una mica més de llum.

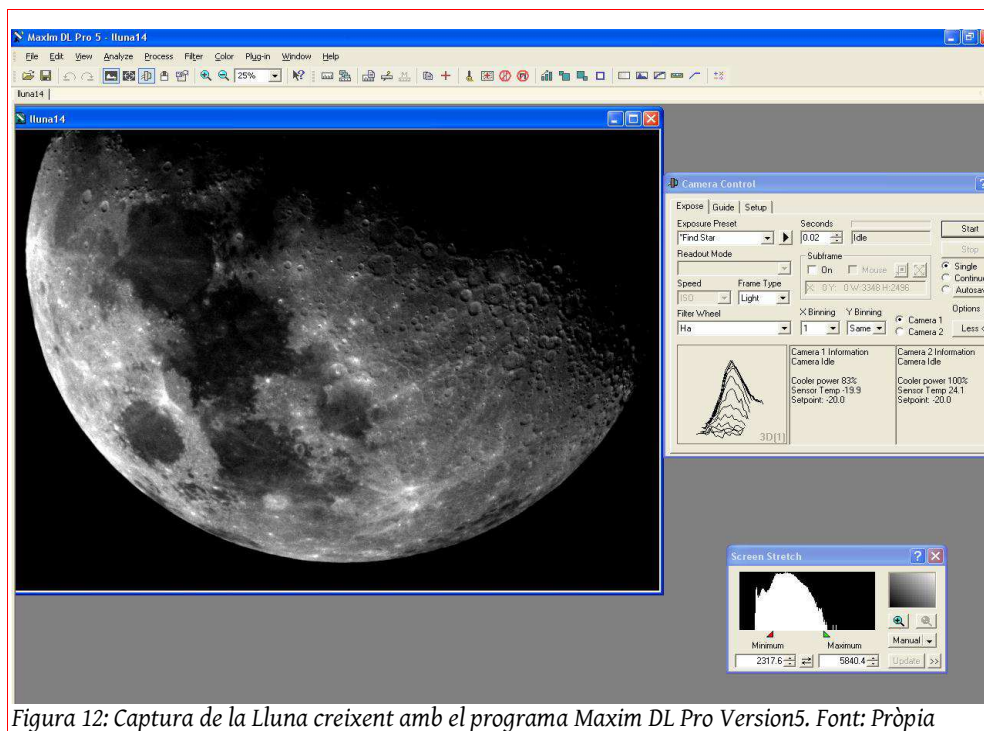


Figura 12: Captura de la Lluna creixent amb el programa Maxim DL Pro Version5. Font: Pròpia

²¹ Resolució de 1 píxel = 5,4 micròmetres

Una vegada tenim la Lluna situada en el nostre ocular, hem de moure la imatge amb el comandament que porta acoblat el telescopi, i així podem escollir quan volem que es prengui la fotografia. Una vegada hem guardat diverses fotografies, podem ampliar la imatge al 100%, ja que la que veiem inicialment està solament al 25% (figura 12). Una vegada tenim la imatge més gran, els relleus es veuen amb molta major claredat, sobretot els que estan prop del terminator.

Així, per exemple, la imatge de la Lluna Creixent que veiem en la captura de pantalla del programa queda de la següent manera:



Figura 13: Lluna creixent, dia 24/09/12 de 21.30h a 22.30h. Font: Pròpia

5.2. Tractament

Una vegada escollides les millors imatges (una de Lluna creixent i una de Lluna minvant) capturades amb el programa esmentat, necessitem tractar-les i retocar-les perquè es vegin amb la màxima qualitat i nitidesa. Això ho fem amb l'ajuda del programa **Photoshop**, bàsicament amb les opcions de brillantor i contrast. A més girem la imatge perquè es vegi tal com la veiem des de la Terra, i no invertida que és com ens la dona el telescopi. El resultat és el següent:

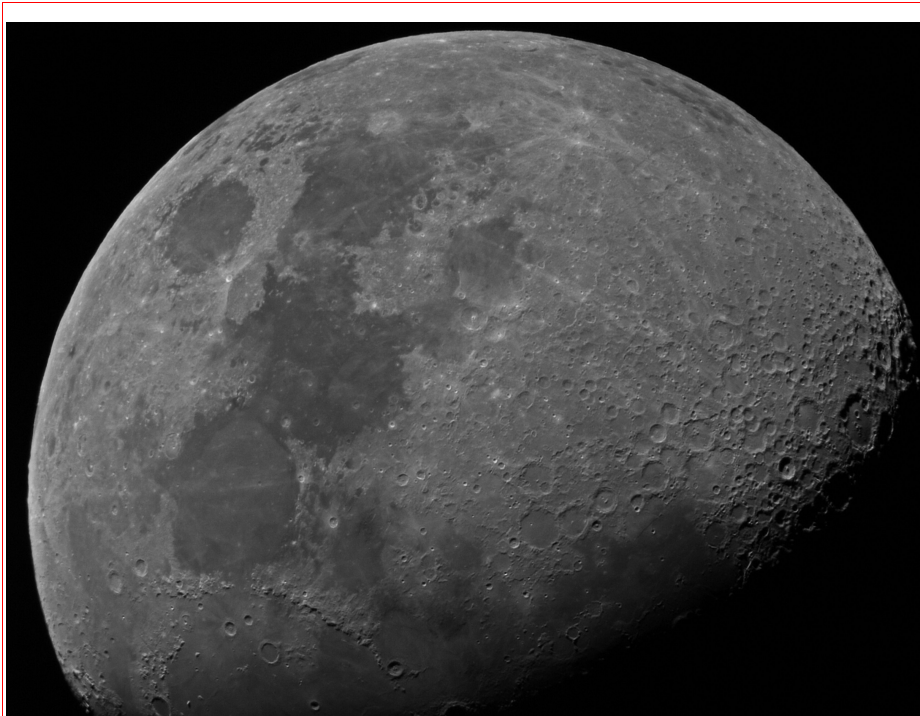


Figura 14: Lluna creixent, dia 24/09/12 de 21.30h a 22.30h. Font: Pròpia

I la fotografia final de la Lluna minvant (tractada de la mateixa forma) és aquesta:

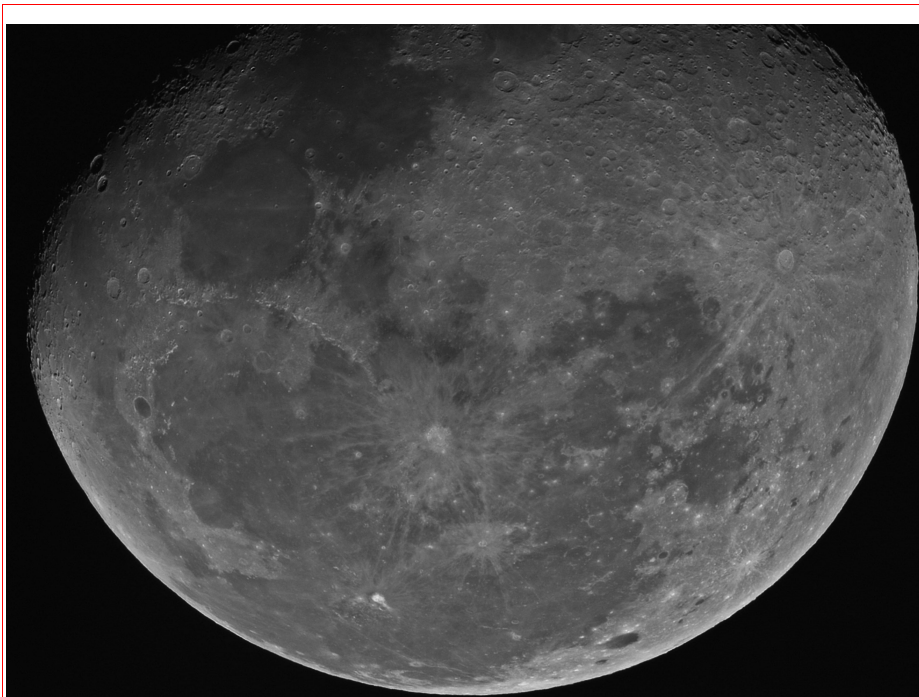


Figura 15: Lluna minvant, dia 3/10/12 de 22.30 a 23.30. Font: Pròpia

Com veiem en la figura 15, en aquest cas la Lluna està encara en trànsit cap al quart minvant, ja que s'observa més de la meitat d'ella. Hi ha bastants relleus repetits en les dues imatges, i aquest fet que no sigui exactament Lluna minvant ens comportarà més error en els càlculs de les altures

A continuació, ampliant les imatges al 100% hem d'identificar cada relleu. Aquesta identificació la vaig dur a terme principalment amb l'ajuda del programa **Virtual Moon Atlas** i algunes altres pàgines web o llibres.

Així vaig identificar un total de 500 relleus, i de cadascun d'ells vaig recollir del *Virtual Moon Atlas* la següent informació: tipus de relleu (cràter, plana, vall, mar, muntanya, fissura...), dimensions, altura, període geològic en què es va formar, descripció bàsica, posició i origen del nom.

6. Elaboració de la pàgina web

Per crear la pàgina web amb el mapa virtual de la Lluna, l'Agrupació Astronòmica de Girona va reservar un apartat en el seu web, al qual s'accedeix a través del següent enllaç: <http://www.astrogirona.com/node/1990>

En primer lloc divideixo les dues fotografies que sortiran a la web (una de Lluna creixent i una de Lluna minvant) en vuit parts iguals, ja que així cada part de la fotografia s'obrirà en una altra finestra amb la imatge ampliada. A continuació, obrint cada una d'aquestes imatges amb el programa *Image Ready*, vaig identificant els relleus i posant a cadascun d'ells el següent enllaç (que és el que s'obrirà al clicar sobre el relleu):

<http://www.astrogirona.com/projectes/2012/mapalluna/text/xxxxxx.html> on xxxxxx és el nom del relleu.

Així, veiem en la següent captura de pantalla com al seleccionar amb l'*Image Ready* un cràter en concret, podem posar-hi el seu nom així com l'enllaç en el que carregaré la seva informació. Això ho he de fer per als 500 relleus identificats. En la finestra que se'ns obre, hem d'omplir els següents camps:

- Tipus: imatge
- Nom: xxxxxx (nom del relleu).
- URL²²: enllaç en el qual carregarem la informació del cràter.
- Destí: _blank (perquè s'obri una finestra nova en seleccionar el relleu).
- Alt: xxxxxxxxxx (és el que volem que surti al passar el ratolí per sobre del relleu. Hi poso el nom del relleu i les seves dimensions).

²² URL: Uniform Resource Locator (localitzador uniforme de recursos).

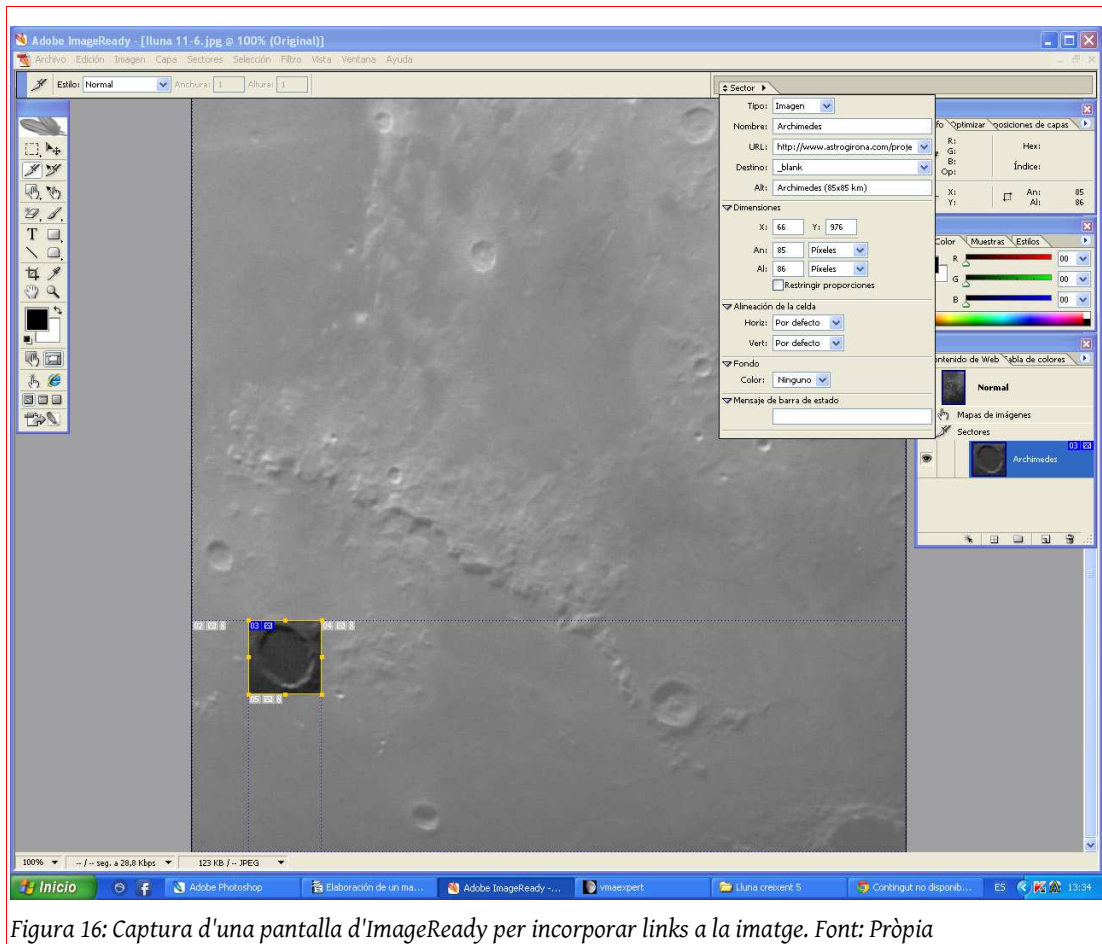


Figura 16: Captura d'una pantalla d'ImageReady per incorporar links a la imatge. Font: Pròpia

A l'annex 3 podem trobar les setze parts de la Lluna (vuit de la Lluna minvant i vuit de la Lluna creixent) que he utilitzat a la meva pàgina web.

Seguidament, necessitem crear un arxiu per cada un dels relleus identificats que contingui tota la informació recollida: tipus de relleu, dimensions, altura, període geològic, descripció, posició i origen del nom. Aquests arxius han de tenir el mateix nom que el que hem posat a l'enllaç i els he de guardar en format de pàgina web, ja que així al clicar a cada enllaç apareixerà tota aquesta informació.

A continuació, amb el programa *Adobe Dreamweaver* editem la pàgina web a nivell estètic. És a dir, definim el format de lletra, els colors, etc.

Finalment, és necessari posar tota la informació de la pàgina web en un servidor, perquè així qualsevol persona en qualsevol moment pugui veure el mapa lunar. Els servidors són anomenats **FTP**²³, i són un protocol de xarxa per a la transferència d'arxius entre sistemes

²³ FTP: File Transfer Protocol (Protocol de Transferència de Fitxers)

connectats en xarxa. Es necessita un client d'un programa FTP per pujar la informació de la pàgina web al servidor. Amb el programa WS_FTP, els membres de l'Agrupació Astronòmica em van deixar allotjar la meua pàgina web en el seu servidor.

I ja tenim la pàgina muntada. A la pàgina web de l'Agrupació²⁴, hi ha un enllaç (configurat amb *Adobe Dreamweaver*), que va directament a la meua pàgina. En aquesta, hi ha una introducció i explicació del projecte, així com les dues fotografies de la Lluna. Cadascuna d'elles, dividida en vuit parts, pot ser ampliada, i des d'aquestes zones es pot accedir a la informació de tots els relleus identificats.

²⁴ www.astrogirona.com

7. Mesuraments

7.1. *Altura dels relleus: dos mètodes possibles*

Per calcular l'altura dels cràters, ho farem a partir de l'ombra que projecten en les fotografies que vaig obtenir en les observacions de la Lluna creixent i Lluna minvant.

Hi ha dues formes de fer els càlculs, però ambdues tenen la mateixa base. Tot i això, aquestes formes no són del tot precises ja que no tenim en compte diferents factors que citaré en les conclusions.

Les dues figures següents representen la Lluna en quart creixent o quart minvant, on els rajos solars vénen de la dreta, i la Terra està posicionada en un angle de 90° respecte la Lluna. Llavors, la cara oculta és la que està pintada en gris, i la cara no il·luminada la que està ratllada (el terminador és la línia que separa la nit lunar del dia lunar). Traçant un plànol tangent a la Lluna en el punt de la muntanya, veiem que l'ombra real de la muntanya seria el que està sobre el plànol tangent. Però la zona fosca (el que nosaltres anomenem ombra) que observem des de la Terra és tota la zona ratllada, així que és aquesta (que va en la mateixa direcció que els rajos del Sol) la que veiem en les fotografies i a partir de la qual farem els càlculs. Aquesta ombra aniria des del cim de la muntanya fins al punt sobre la superfície de la Lluna (en la tangent) on acaba l'ombra.

El segment AB en la figura 17 (mètode 1) és la distància des de la base de la muntanya fins al terminador, en canvi en la figura 18 (mètode 2) és la distància des de l'inici de l'ombra (cim de la muntanya) fins al terminador. AC, en el primer cas és el radi lunar, mentre que en el segon seria el radi lunar més l'altura de la muntanya.

Per tant, tenim el triangle ABC en els dos esquemes, de costats AB i AC coneguts.

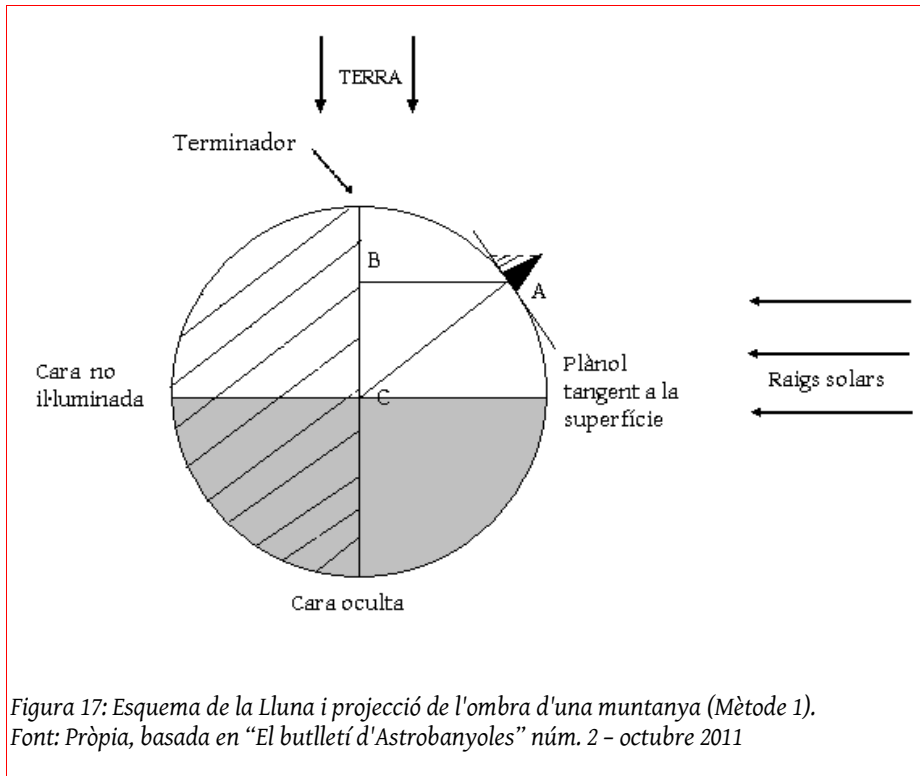


Figura 17: Esquema de la Lluna i projecció de l'ombra d'una muntanya (Mètode 1).
Font: Pròpia, basada en "El butlletí d'Astrobanyoles" núm. 2 - octubre 2011

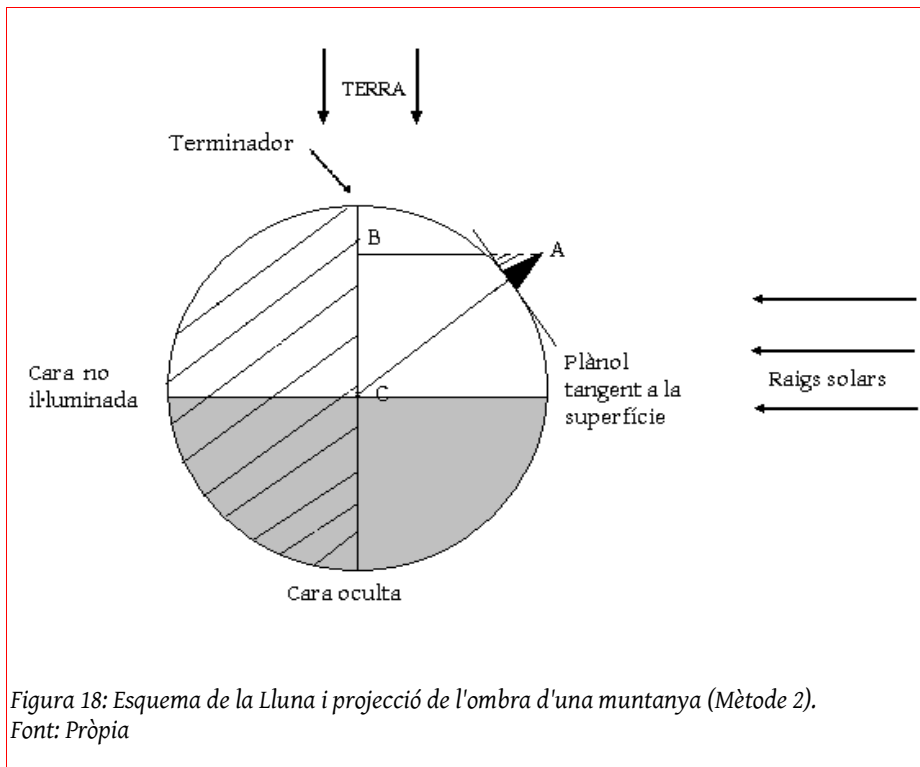


Figura 18: Esquema de la Lluna i projecció de l'ombra d'una muntanya (Mètode 2).
Font: Pròpia

Representant els dos triangles de cada esquema, trobem que són els següents:

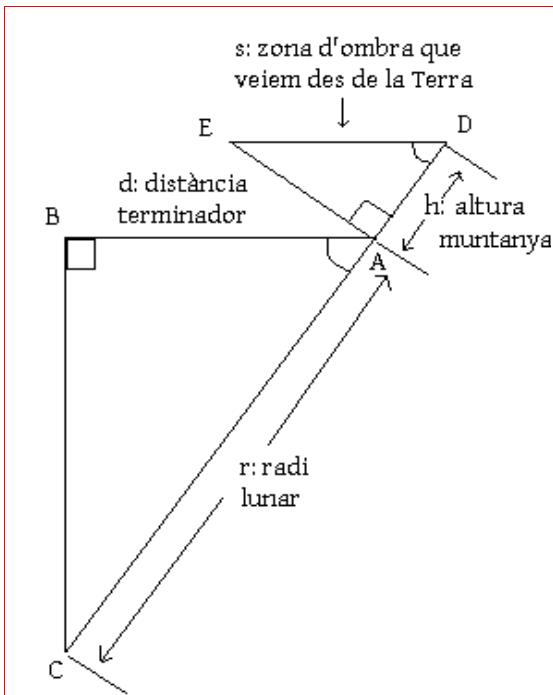


Figura 19: Triangles semblants per al càlcul de l'altura dels relleus lunars (Mètode 1). Font: Pròpia, basada en "El butlletí d'Astrobanyoles" núm. 2 - octubre 2011

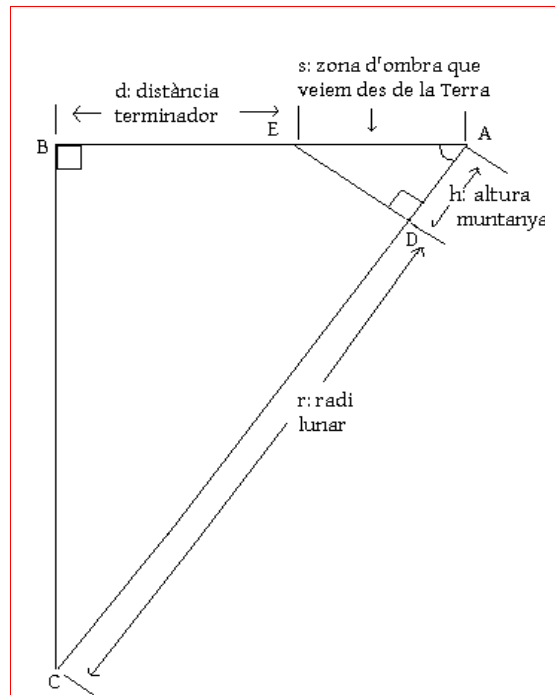


Figura 20: Triangles semblants per al càlcul de l'altura dels relleus lunars (Mètode 2). Font: Pròpia

Així doncs, trobaríem dues fórmules diferents.

Centrant-nos en primer lloc en el **mètode 1**, els dos triangles ABC i ADE són semblants, perquè tenen els tres angles iguals. Tots dos tenen un angle recte, i els angles BAC i EDA també són iguals, ja que una mateixa recta és tallada per dues paral·leles; per tant el tercer angle també ha de ser el mateix. D'aquí, podem extreure la fórmula dels triangles semblants, i per tant:

$$\frac{DA}{ED} = \frac{BA}{CA}$$

$$DA = \frac{ED \cdot BA}{CA}$$

D'aquesta forma, sabem el valor de la nostra incògnita, h:

$$h = \frac{sd}{r}$$

Calculant ara la fórmula per al **mètode 2**, veiem també que hi ha dos triangles en aquest dibuix, un és ABC i l'altre ADE. Els dos són semblants, perquè tenen els tres angles iguals. En primer lloc els dos angles rectes, (ABC i EDA) i l'angle BAC o EAD, que és comú entre els dos triangles, per la qual cosa el tercer angle també ha de ser el mateix. D'aquí, podem extreure també la fórmula dels triangles semblants, i tenim:

$$\frac{DA}{EA} = \frac{BA}{CA}$$
$$DA = \frac{EA \cdot BA}{CA}$$
$$h = \frac{s(d+s)}{r+h}$$

Així, aïllant la nostra incògnita, h, trobem que:

$$h(r+h) = s(d+s)$$
$$hr + h^2 = sd + s^2$$
$$h^2 + hr - (sd + s^2) = 0$$

$$h = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)}}{2}$$

(deixem ja solament l'opció positiva i no ± perquè l'altura ha de ser positiva)

En tenir dues formules i les dues correctes, l'exemple del cràter Tycho serà tractat mitjançant els dos mètodes, i explicat fent tots els càlculs. El càlcul dels altres cràters els efectuaré mitjançant els dos mètodes, però amb l'ajuda d'un full de càlcul Excel.

A partir d'aquí, anem a prosseguir tots els càlculs de les incerteses amb ambdues fórmules.

7.2. Factor d'escala

Per poder aplicar la fórmula anterior hem de conèixer s, d i r, per la qual cosa necessitem calcular el **factor d'escala, f**, de la fotografia. Per fer-ho, mesurarem el radi en la fotografia (r_{aparent}) i dividirem el radi real (r_{real}), que és una dada coneguda, per l'aparent.

Perquè els càlculs siguin més precisos, no calcularem numèricament ni el factor d'escala (f) ni l'ombra real (s) ni la distància real al terminador (d), sinó que anirem substituint els valors trobats (si fa falta amb fraccions per no perdre exactitud) i no farem cap càlcul numèric fins a l'altura (h).

Per calcular el radi aparent, he partit de les fotografies de la Lluna i he buscat el seu centre. A partir d'aquest, en el Photoshop hi ha una opció de mesurar una imatge, i per tant seleccionant el radi lunar en la fotografia, he obtingut que el radi aparent lunar és de 56,80cm, amb una incertesa de 2,00cm, a causa que hi ha l'error humà en buscar on està el centre i en seleccionar el radi.

Així doncs, el radi aparent és:

$$r_{\text{aparent}} = (56,80 \pm 2,00) \text{ cm}$$

A continuació, agafant com a dada coneguda el radi (r_{real}) de la Lluna (1737,5km)²⁵, hem de dividir-lo pel radi en la fotografia, obtenint així el factor d'escala (a quants km reals equival un cm de la fotografia). El càlcul és el següent:

$$f = \frac{r_{\text{real}}}{r_{\text{aparent}}} = \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}$$

Seguidament hem de calcular la incertesa d'aquest factor d'escala. Encara que considerem que el radi real no té incertesa el radi aparent si que en té. Així doncs:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= \frac{\Delta(r_{\text{real}})}{r_{\text{real}}} + \frac{\Delta(r_{\text{aparent}})}{r_{\text{aparent}}} \\ \Delta f &= f \frac{\Delta(r_{\text{aparent}})}{r_{\text{aparent}}} \\ \Delta f &= \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \cdot \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} = \frac{3475 \text{ km} \cdot \text{cm}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Per tant:
$$f = \left(\frac{1737,5}{56,80} \pm \frac{3475}{56,80^2} \right) \text{ km} \cdot \text{cm}^{-1}$$

²⁵ Considerada sense incertesa i extreta del programa Celestia.

7.3. Ombra i distància al terminador aparents

Seguidament he de calcular l'ombra que fan els relleus i la seva distància al terminador en la fotografia. Per a això, utilitzaré la distància que em dóna el Photoshop, ja que així jo solament haig de seleccionar des d'on fins a on s'ha de mesurar, i hi haurà molta menys incertesa que fent-ho amb una regla.

Agafant l'ombra d'un cràter qualsevol, primerament hem d'ampliar molt la imatge del cràter, seleccionant-ho i retallant-ho en el Photoshop:

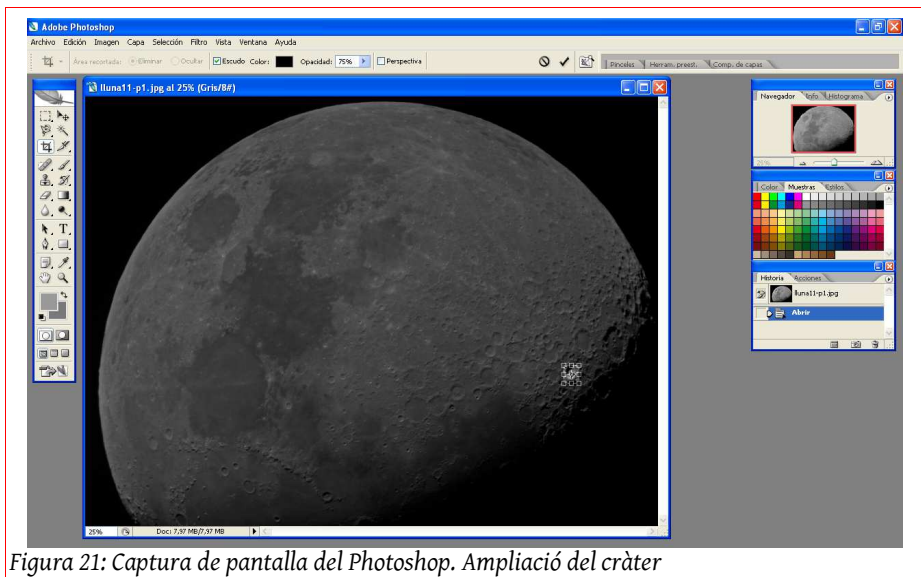


Figura 21: Captura de pantalla del Photoshop. Ampliació del cràter

A continuació, una vegada tenim l'ombra molt ampliada, seleccionem el rectangle que volem que el Photoshop ens mesuri, tenint en compte que la longitud de l'ombra que volem calcular serà la hipotenusa del rectangle, i que aquesta ha d'anar en la mateixa direcció que els rajos del sol:

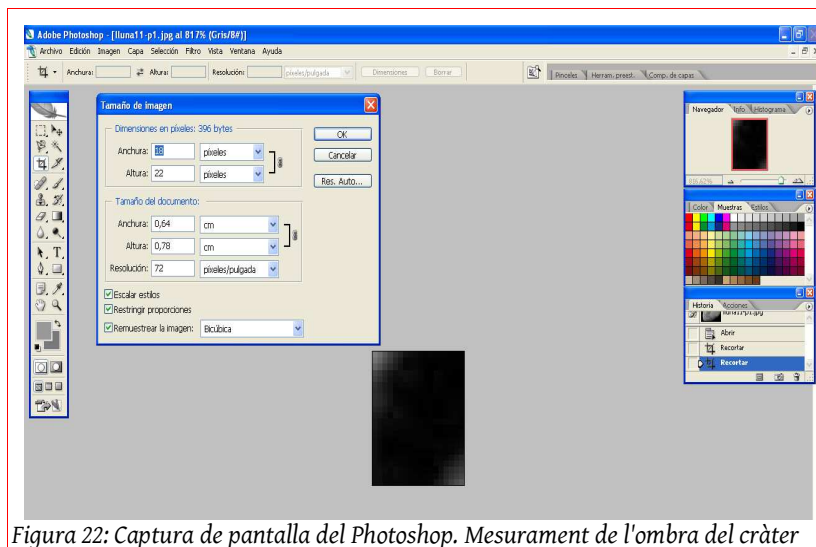


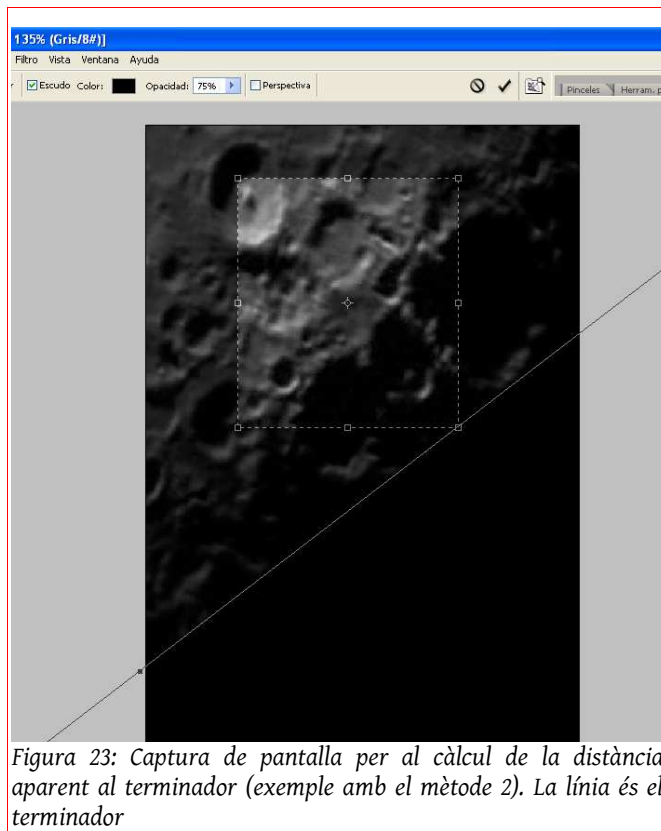
Figura 22: Captura de pantalla del Photoshop. Mesurament de l'ombra del cràter

Així doncs, tenim un rectangle del que coneixem els seus costats. Per calcular la diagonal solament hem d'aplicar el teorema de Pitàgores

Si s_x =amplada del rectangle, i s_y =altura del rectangle:

$$s_{aparent} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

Repetim el mateix procés per calcular la distància aparent fins al terminador (fins on ja no es veu cap relleu) i en la mateixa direcció que els rajos solars. Hem de tenir en compte que en el mètode 1 hem de mesurar la distància des de la base del cràter fins al terminador i en el mètode 2 des de l'inici de l'ombra. Per això, hem de procedir de la següent forma:



Si d_x =amplada del rectangle, i d_y =altura del rectangle:

$$d_{aparent} = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$$

Les seves incerteses variaran en cada cas perquè l'amplada i altura del rectangle no seran les mateixes. Per això, comptant que la incertesa de cada amplada i altura és de $\pm 0,05 \text{ cm}$, tenim que les incerteses de l'ombra i la distància aparents són:

$$\frac{\Delta s_{\text{aparente}}}{s_{\text{aparente}}} = \frac{\Delta \sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} = \frac{\Delta (s_x^2 + s_y^2)^{\frac{1}{2}}}{(s_x^2 + s_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta (s_x^2 + s_y^2)}{s_x^2 + s_y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta s_x^2 + \Delta s_y^2}{s_x^2 + s_y^2}$$

I calculant per separat la Δs_x^2 que és el mateix que Δs_y^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s_x^2}{s_x^2} &= 2 \frac{\Delta s_x}{s_x} \\ \Delta s_x^2 &= 2s_x^2 \frac{\Delta s_x}{s_x} \\ \Delta s_x^2 &= 2s_x \Delta s_x \end{aligned}$$

I tornant-ho a ajuntar:

$$\Delta s_{\text{aparente}} = s_{\text{aparente}} \cdot \frac{2s_x \Delta s_x + 2s_y \Delta s_y}{2(s_x^2 + s_y^2)} = s_{\text{aparente}} \cdot \frac{s_x \cdot 0,05 + s_y \cdot 0,05}{s_x^2 + s_y^2} = s_{\text{aparente}} \cdot \frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2}$$

Substituint ara l'ombra aparent:

$$\Delta s_{\text{aparente}} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} = \frac{0,05(s_x + s_y)}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

I el mateix amb la incertesa de la distància al terminador:

$$\Delta d_{\text{aparente}} = d_{\text{aparente}} \cdot \frac{0,05(d_x + d_y)}{d_x^2 + d_y^2}$$

Així, l'ombra i distància aparents són:

$$s_{\text{aparente}} = \left(\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \pm \frac{0,05(s_x + s_y)}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \right) \text{ cm}$$

$$d_{\text{aparente}} = \left(\sqrt{d_x^2 + d_y^2} \pm \frac{0,05(d_x + d_y)}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2}} \right) \text{ cm}$$

7.4. Ombra i distància al terminador reals

Així doncs, per saber s_{real} i d_{real} solament necessitarem multiplicar les distàncies aparents pel factor d'escala:

$$s_{real} = s_{aparent} \cdot f \qquad d_{real} = d_{aparent} \cdot f$$

$$s_{real} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \qquad d_{real} = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}$$

I les seves incerteses (fent-ho en el cas de l'ombra) valdran:

$$\frac{\Delta(s_{real})}{s_{real}} = \frac{\Delta(s_{aparent})}{s_{aparent}} + \frac{\Delta f}{f}$$

Podent ara substituir la incertesa de l'ombra aparent per la que hem trobat abans:

$$\Delta(s_{real}) = s_{real} \left[\frac{s_{aparent} \cdot \frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2}}{s_{aparent}} + \frac{\Delta f}{f} \right] = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{\frac{3475 \text{ km} \cdot \text{cm}}{56,80^2 \text{ cm}^2}}{\frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}} \right]$$

$$\Delta(s_{real}) = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]$$

I el mateix per a la distància al terminador:

$$\Delta(d_{real}) = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(d_x + d_y)}{d_x^2 + d_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]$$

Així, l'ombra i distància reals són:

$$s_{real} = \left(\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \pm \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right] \right) \text{ km}$$

$$d_{real} = \left(\sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \pm \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(d_x + d_y)}{d_x^2 + d_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right] \right) \text{ km}$$

7.5. Càlcul de l'altura dels relleus

A partir d'aquí, per facilitar la notació, en lloc de posar s_{real} , d_{real} , r_{real} , escriurem directament s , d , r , entenent ja que aquestes són les dades reals.

MÈTODE 1: La fórmula per calcular l'altura dels relleus hem trobat que era:

$$h = \frac{sd}{r}$$

Així doncs, partint d'aquesta fórmula, substituïm tots els valors anteriorment trobats:

$$h = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}}{1737,5 \text{ km}}$$

$$h = \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2}$$

Finalment hem de calcular la incertesa de l'altura. Com que no considerem incertesa en el radi, la incertesa de l'altura serà la següent:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta r}{r}$$

$$\Delta h = h \left[\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta d}{d} \right]$$

I substituint amb els valors anteriorment trobats d'ambdues incerteses:

$$\Delta h = h \left[\frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right] + \frac{\sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(d_x + d_y)}{d_x^2 + d_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} + \frac{\sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}}} \right]$$

Finalment substituïm el valor que hem trobat de l'altura:

$$\Delta h = \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \left[0,05 \left(\frac{s_x + s_y}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{d_x + d_y}{d_x^2 + d_y^2} \right) + \frac{4,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]$$

Amb això, obtindríem que l'altura de la muntanya és:

$$h = \left(\frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \pm \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \left[0,05 \left(\frac{s_x + s_y}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{d_x + d_y}{d_x^2 + d_y^2} \right) + \frac{4,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right] \right) \text{ km}$$

MÈTODE 2: En aquest cas, la fórmula és la següent (ja agafant només l'opció positiva perquè l'altura ha de ser major que zero):

$$h = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)}}{2}$$

En primer lloc substituïm s i d per les fórmules anteriorment trobades i r pel radi:

$$h = \frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \left[\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} + \left(\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \right)^2 \right]}}{2}$$

$$h = \frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \left[\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} + (s_x^2 + s_y^2) \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} \right]}}{2}$$

$$h = \frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} \cdot \left[\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} + s_x^2 + s_y^2 \right]}}{2}$$

Ara hem de calcular la incertesa d'aquesta altura (Δh), partint de la fórmula que hem trobat en la qual no substituïm els valors de s, d i r :

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta(-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)})}{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)}} + \frac{\Delta z}{z}$$

Com que és bastant llarg, ho dividiré en diverses parts:

- Incertesa del numerador de la fracció:

$$\Delta[-r + (r^2 + 4(sd + s^2))^{\frac{1}{2}}] = \cancel{\Delta r} + \Delta[(r^2 + 4(sd + s^2))^{\frac{1}{2}}]$$

On Δr és 0. Ens quedem amb la segona part:

$$\Delta[(r^2 + 4(sd + s^2))^{\frac{1}{2}}] = \cancel{\Delta r^2} + \Delta[(4(sd + s^2))^{\frac{1}{2}}]$$

En aquest cas també se'ns anul·la Δr^2 , i ens tornem a quedar així amb l'altra part:

$$\Delta[(4(sd+s^2))^{\frac{1}{2}}] = 4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\frac{4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}]}{4(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(sd+s^2)}{4(sd+s^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(sd+s^2)}{(sd+s^2)}$$

- Ens centrem novament amb el numerador: $\Delta(sd+s^2) = \Delta sd + \Delta s^2$

- Incertesa de l'ombra per la distància al terminador:

$$\frac{\Delta sd}{sd} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta d}{d}$$

$$\Delta sd = sd \left[\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta d}{d} \right] = \frac{sd\Delta s}{s} + \frac{sd\Delta d}{d} = d\Delta s + s\Delta d$$

$$\frac{\Delta s^2}{s^2} = 2 \frac{\Delta s}{s}$$

- Incertesa de l'ombra al quadrat:

$$\Delta s^2 = 2s^2 \frac{\Delta s}{s}$$

$$\Delta s^2 = 2s\Delta s$$

Ara que ja tenim totes les incerteses separatament, hem de posar-les totes juntes en la fórmula inicial, la qual cosa també anem a fer per passos (al revés que abans):

$$\frac{4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}]}{4(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(sd+s^2)}{(sd+s^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd+s^2)}$$

$$4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}] = 4(sd+s^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd+s^2)} \right]$$

$$4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}] = 2(sd+s^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd+s^2)} \right]$$

I dividint la fracció de $\frac{(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}}{sd+s^2} = \frac{1}{(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}}$:

$$4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}] = 2 \left[\frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

- Així, la fórmula global per a la incertesa és:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{[2(\frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd + s^2)^{\frac{1}{2}}})]}{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)}} \rightarrow \Delta h = h \cdot \frac{2(d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s)}{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)} \cdot \sqrt{(sd + s^2)}}$$

A continuació hauríem de substituir els valors anteriorment trobats d'ambdues incerteses i de l'altura en la fracció, així no ens faria falta trobar aquests valors numèricament. Però aquesta fórmula seria massa llarga, així que he decidit que és millor calcular primer s, d, h, i les seves incerteses a partir de les altres fórmules, i amb aquests valors, calcular la incertesa de l'altura. Aquest mètode es troba explicat en l'exemple del Tycho, que encara que pel mètode 1 no ens faci falta calcular les variables, en el mètode 2 sí.

Finalment, trobem doncs que l'altura és la següent:

$$h = \left(\frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} \cdot [\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + s_x^2 + s_y^2}]}{2} \pm h \cdot \frac{2(d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s)}{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)} \cdot \sqrt{(sd + s^2)}} \right) \text{ km}$$

7.6. Exemple del cràter Tycho

Seguidament anem a calcular l'altura del cràter Tycho amb els dos mètodes, i per a tots els altres cràters, utilitzaré un full de càlcul (Excel).

Mètode 1: En aquest cas, solament necessito les dades que he calculat amb el Photoshop de la mesura de l'ombra i de la distància al terminador, ja que abans he trobat la fórmula general de l'altura amb aquestes dues soles incògnites. Són els següents:

$$\begin{matrix} s_x = 0,60 \text{ cm} & \text{i} & d_x = 6,31 \text{ cm} \\ s_y = 0,71 \text{ cm} & & d_y = 7,27 \text{ cm} \end{matrix}$$

A partir d'aquestes dades, apliquem la fórmula de l'altura que hem trobat:

$$h = \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \sqrt{6,31^2 \text{ cm}^2 + 7,27^2 \text{ cm}^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} = 4,8 \text{ km} = 4800 \text{ m}$$

I la seva incertesa:

$$\Delta h = \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \sqrt{6,31^2 \text{ cm}^2 + 7,27^2 \text{ cm}^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \left[0,05 \left(\frac{0,60 \text{ cm} + 0,71 \text{ cm}}{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} + \frac{6,31 \text{ cm} + 7,27 \text{ cm}}{6,31^2 \text{ cm}^2 + 7,27^2 \text{ cm}^2} \right) + \frac{4,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]$$

$$\Delta h = \pm 0,74 \text{ km} = \pm 740 \text{ m}$$

Pel que trobem que l'altura és: $h = (4800 \pm 740) \text{ m}$

Amb una incertesa relativa (I_r) de: $I_r = \frac{\Delta h}{h} \cdot 100 = \frac{740}{4800} \cdot 100 = 15 \%$

Mètode 2: Seguidament farem el mateix càlcul utilitzant el segon mètode. En aquest cas hem de calcular primer l'ombra i la distància al terminador i les seves incerteses a partir de les fórmules que he trobat. Hem de tenir en compte que ara les components s_x i s_y no varien, però sí la distància al terminador (ja que hem de mesurar des de l'inici de l'ombra i no des del peu del cràter). Aquestes són:

$$\begin{matrix} s_x = 0,60 \text{ cm} & \text{i} & d_x = 5,93 \text{ cm} \\ s_y = 0,71 \text{ cm} & & d_y = 7,02 \text{ cm} \end{matrix}$$

En primer lloc fem el càlcul de l'altura, que és el que busquem principalment:

$$h = \frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} \cdot [\sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \sqrt{5,93^2 \text{ cm}^2 + 7,02^2 \text{ cm}^2} + 0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2]}}{2} = 5,1 \text{ km} = 5100 \text{ m}$$

I ara per calcular la incertesa, necessitem també l'ombra i la distància al terminador, i les seves incerteses respectives:

$$s_{\text{real}} = \sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} = 28 \text{ km}$$

$$\Delta s_{\text{real}} = \sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(0,60 \text{ cm} + 0,71 \text{ cm})}{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} + \frac{2,00 \text{ km}}{56,80 \text{ km}} \right] = \pm 3 \text{ km}$$

$$d_{\text{real}} = \sqrt{5,93^2 \text{ cm}^2 + 7,02^2 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} = 281 \text{ km}$$

$$\Delta d_{\text{real}} = \sqrt{5,93^2 \text{ cm}^2 + 7,02^2 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(5,93 \text{ cm} + 7,02 \text{ cm})}{5,93^2 \text{ cm}^2 + 7,02^2 \text{ cm}^2} + \frac{2,00 \text{ km}}{56,80 \text{ km}} \right] = \pm 12 \text{ km}$$

Així doncs, la incertesa de l'altura és la següent:

$$\Delta h = 5,1 \text{ km} \cdot \frac{2(281 \text{ km} \cdot 3 \text{ km} + 28 \text{ km} \cdot 12 \text{ km} + 2 \cdot 28 \text{ km} \cdot 3 \text{ km})}{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4(28 \text{ km} \cdot 281 \text{ km} + 28^2 \text{ km}^2)} \cdot \sqrt{(28 \text{ km} \cdot 281 \text{ km} + 28^2 \text{ km}^2)}} = \pm 0,09 \text{ km} = \pm 90 \text{ m}$$

Per tant, l'altura és: $h = (5100 \pm 90) \text{ m}$

Amb una incertesa relativa (I_r) de: $I_r = \frac{\Delta h}{h} \cdot 100 = \frac{90}{5100} \cdot 100 = 2 \%$

En realitat, l'altura del cràter Tycho és de 4800m^{26} , per la qual cosa en el mètode 1 ens surt exacte, encara que hi hagi més incertesa. Els dos resultats són:

Mètode 1: $h = (4800 \pm 740)\text{m}$

Mètode 2: $h = (5100 \pm 90)\text{m}$

Altura real: $h_{real} = 4800\text{m}$

Per tant, els errors relatius (E_r) respecte al valor real de l'altura són:

Mètode 1: $E_r = \frac{|h_{real} - h|}{h_{real}} \cdot 100 = \frac{|4800 - 4800|}{4800} \cdot 100 = 0 \%$

Mètode 2: $E_r = \frac{|h_{real} - h|}{h_{real}} \cdot 100 = \frac{|4800 - 5100|}{4800} \cdot 100 = 6 \%$

Com veiem, el primer mètode sembla ser més exacte que el segon, ja que hi ha menys error relatiu respecte al valor real. No obstant això, quant a la precisió, és més precís el segon mètode perquè ens surt una incertesa relativa molt petita respecte del valor trobat (solament del 2%), mentre que en el primer ens surt del 15%.

Pensant en els mètodes emprats, considero que la incertesa real hauria de ser bastant gran ja que hi ha diverses causes d'error en el treball (citades en les conclusions), per la qual cosa en principi crec que és bastant irreal que ens surti solament una incertesa del 2% en el segon mètode.

Totes les altres altures les he calculat amb un full de càlcul, introduint les fórmules pertinents. Finalment he volgut provar-ho amb els dos mètodes, per poder comparar els resultats i veure quin dels dos ens surt millor. Tot seguit es poden veure les dues taules de resultats, on els cràters de l'1 al 10 estan en la imatge de la Lluna creixent, i els de l'11 al 20 estan en la de la Lluna minvant (veure la seva situació en l'annex 4):

²⁶ Totes les altures dels cràters són extretes del programa Virtual Moon Atlas.

	S _x (± 0,05cm)	S _y (± 0,05cm)	d _x (± 0,05cm)	d _y (± 0,05cm)	h (m)	Δh (m)	I _r (%)	h _{real} (m)	E _r (%)
1. Herschel	0,25	0,28	12,28	14,83	3900	1000	26	3770	3
2. Alpetragius	0,27	0,32	11,24	12,49	3800	920	24	3900	3
3. Thebit	0,21	0,25	10,88	12,98	3000	860	29	3270	8
4. Werner	0,23	0,28	14,32	18,17	4500	1200	27	4220	7
5. Hell	0,21	0,25	7,57	9,43	2100	620	30	2200	5
6. Ball	0,32	0,37	7,46	9,28	3100	690	22	2800	11
7. Tycho	0,60	0,71	6,31	7,27	4800	740	15	4800	0
8. Porter	0,56	0,71	4,63	5,29	3400	540	16	2800	21
9. Gruemberger	0,88	1,06	4,20	4,69	4700	620	13	4300	9
10. Moretus	0,71	0,88	5,12	6,24	4900	690	14	5000	2
11. Hercules	0,53	0,60	3,39	3,63	2100	370	18	3200	34
12. Atlas	0,99	1,13	1,80	2,01	2200	310	14	3000	27
13. Burg	0,28	0,32	6,42	6,88	2200	530	24	2200	0
14. Grove	0,28	0,32	5,40	5,82	1800	450	25	2370	24
15. Daniell	0,23	0,27	6,70	7,16	1900	520	27	2070	8
16. Luther	0,21	0,25	8,26	9,70	2200	650	30	1900	16
17. Romer	0,39	0,42	6,14	7,44	3000	600	20	3400	12
18. Macrobius	0,85	1,06	2,72	3,00	3000	410	14	3700	19
19. Hill	0,25	0,28	4,76	5,61	1500	400	27	3340	55
20. Carmichael	0,28	0,35	5,36	6,00	1900	460	24	3640	48

Taula 2: Càlcul de l'altura dels cràters segons el mètode 1

	S _x (± 0,05cm)	S _y (± 0,05cm)	S _{real} (km)	ΔS _{real} (km)	d _x (± 0,05cm)	d _y (± 0,05cm)	d _{real} (km)	Δd _{real} (km)	h (m)	Δh (m)	I _r (%)	h _{real} (m)	E _r (%)
1. Herschel	0,25	0,28	12	3	12,28	14,83	589	23	4000	104	3	3770	6
2. Alpetragius	0,27	0,32	13	3	11,24	12,49	514	20	3900	92	2	3900	0
3. Thebit	0,21	0,25	10	3	10,88	12,98	518	20	3000	74	2	3270	8
4. Werner	0,23	0,28	11	3	14,32	18,17	708	27	4600	127	3	4220	9
5. Hell	0,21	0,25	10	3	7,57	9,43	370	15	2200	47	2	2200	0
6. Ball	0,32	0,37	15	3	7,46	9,28	364	15	3300	66	2	2800	18
7. Tycho	0,60	0,71	28	3	6,31	7,27	295	13	5300	95	2	4800	10
8. Porter	0,56	0,71	28	3	4,63	5,29	215	10	3900	61	2	2800	39
9. Gruemberger	0,88	1,06	42	4	4,20	4,69	193	9	5700	91	2	4300	33
10. Moretus	0,71	0,88	35	3	5,12	6,24	247	11	5600	95	2	5000	12
11. Hercules	0,53	0,60	25	3	3,39	3,63	152	8	2500	35	1	3200	22
12. Atlas	0,99	1,13	46	4	1,80	2,01	83	5	3400	46	1	3000	13
13. Burg	0,28	0,32	13	3	6,42	6,88	288	12	2200	40	2	2200	0
14. Grove	0,28	0,32	13	3	5,40	5,82	243	11	1900	32	2	2370	20
15. Daniell	0,23	0,27	11	3	6,70	7,16	300	13	1900	36	2	2070	8
16. Luther	0,21	0,25	10	3	8,26	9,70	390	16	2300	50	2	1900	21
17. Romer	0,39	0,42	18	3	6,14	7,44	295	13	3100	56	2	3400	9
18. Macrobius	0,85	1,06	42	4	2,72	3,00	124	7	3900	55	1	3700	5
19. Hill	0,25	0,28	12	3	4,76	5,61	225	10	1600	27	2	3340	52
20. Carmichael	0,28	0,35	14	3	5,36	6,00	246	11	2000	34	2	3640	45

Taula 3: Càlcul de l'altura dels cràters segons el mètode 2

8. Conclusions

Fer aquest treball m'ha aportat moltes coses, i a més, he complert tots els meus objectius. M'he introduït en el món de l'astronomia, aprenent a utilitzar un telescopi i a capturar i tractar les imatges. També he après a utilitzar programes adequats per tractar aquestes imatges i construir el mapa virtual lunar. Però, el més important és potser haver après a identificar els relleus lunars, crear enllaços en cada fotografia de la Lluna i configurar el mapa lunar editant la pàgina web. D'altra banda també són per mi de gran importància els càlculs, amb els quals he gaudit molt i he pogut resoldre la meva hipòtesi de si és possible mesurar les altures dels cràters a partir d'una fotografia, obtenint uns resultats bastant reals i descobrint algunes limitacions que hagués pogut millorar en l'estudi.

Durant el desenvolupament del treball m'he trobat amb diverses dificultats, les quals han estat degudes, sobretot, a què per fer les observacions són necessàries unes determinades condicions, ja siguin meteorològiques, de la Lluna o de disponibilitat del telescopi. Per exemple, per aconseguir unes bones imatges havia d'obtenir-les en fase de Lluna creixent o minvant, que és quan no hi ha massa llum però sí la suficient per visualitzar millor els relleus. A més, a causa que vam planificar les observacions lunars durant l'estiu, molts dies hi havia turbulències atmosfèriques degudes al refredament nocturn de la superfície terrestre (que s'escalfa molt durant el dia en aquesta època l'any), per la qual cosa no era possible obtenir imatges suficientment nítides. Per resoldre aquest problema vam haver de canviar el sistema previst per capturar i processar les imatges. Amb això, finalment vaig obtenir imatges de bona qualitat que m'han servit perfectament tant per als càlculs com per a l'elaboració del mapa virtual lunar.

Centrant-nos en el mapa virtual, m'he familiaritzat molt amb la superfície de la Lluna i tots els seus relleus. És una tasca bastant mecànica però molt interessant i he descobert que la majoria dels relleus de la Lluna porten noms d'importants científics. També m'ha estat possible imaginar molt millor com és el nostre satèl·lit, i ha estat molt interessant el fet de saber com es van formar tots els seus relleus. A més, he après a utilitzar el Photoshop i l'Image Ready, i he creat una pàgina web.

Pensant ara en com millorar el mapa lunar, potser hagués pogut capturar també una imatge de Lluna plena, ja que permetria tenir una idea més global del satèl·lit (encara que els relleus s'haguessin vist pitjor perquè hi hauria massa llum). Una altra millora a assenyalar seria fer les observacions a l'hivern en lloc de l'estiu, ja que a l'hivern hi ha

menys turbulència atmosfèrica (perquè no fa tanta calor), i això em permetria poder utilitzar el telescopi reflector Takahashi Mewlon 210 (que és el que primerament pensàvem utilitzar). Amb ell podria capturar vídeos (transportables a imatges), amb molts més augments, i com a conseqüència també veuríem més nítids els relleus.

No obstant això, estic molt satisfeta del resultat, ja que aquesta pàgina web que inclou el mapa virtual lunar, pot ser d'utilitat per a persones que sentin curiositat o vulguin aprofundir en com és la Lluna.

Centrant-nos en els càlculs, vaig escollir el mesurament de les altures dels cràters per relacionar les dues fases del treball: l'obtenció d'imatges reals de la superfície lunar i el càlcul dels seus relleus, però ara sé que les possibilitats de càlcul d'altres mesuraments són nombroses. Vegem-ne alguns exemples: diàmetre de la Lluna a partir d'una foto d'un eclipsi (si hi hagués hagut un eclipsi aquest estiu, hagués estat molt interessant) o amb una cambra obscura; distància de la Terra a la Lluna a partir d'una fotografia d'un eclipsi o a partir de dues fotografies fetes en dos llocs diferents del món (angle paral·laxi); moviment de rotació lunar a partir de dues fotografies fetes amb algunes hores de diferència; moviment de translació lunar a partir de dues fotografies fetes amb alguns dies de diferència; i diàmetre d'un cràter o un mar, aplicant simplement el factor d'escala, o mesurant el que triga en passar la Lluna per l'angle de visió del telescopi.

Així doncs, després d'escollir com a objectiu calcular l'altura dels cràters, m'he trobat amb algunes limitacions, sobretot en les observacions, ja que no vaig poder obtenir fotografies de major augment (en les quals els mesuraments poguessin ser més precisos) o en les quals es veiés el terminator complet. Malgrat aquestes limitacions, he pogut fer els càlculs amb bastant exactitud, encara que pot haver-hi diverses causes d'error que cito tot seguit.

En primer lloc, hi ha algunes variables que no he tingut en compte al fer els càlculs, i que segurament influeixen en el resultat final. Per exemple, l'angle de visió Terra-Lluna-Sol ha d'influir bastant, ja que aquest varia segons la fase de la Lluna en la qual es prengui la imatge. Si prenem la imatge just en quart creixent o quart minvant, el càlcul serà molt més precís, ja que l'angle de visió serà de 90° (veure annex 6 per a la seva explicació). Per això, en la fotografia que presento en fase de Lluna creixent, atès que està pràcticament en quart creixent, ens surten els resultats més exactes (una mitjana del 7% d'error relatiu en el mètode 1, i del 14% en el mètode 2). En canvi, en la fotografia en fase de Lluna minvant, no vam tenir en compte aquest aspecte (ja que no pensava que això influiria tant), i el dia que prenem la imatge faltaven encara 3 dies per al quart minvant (amb la qual cosa l'angle de visió era inferior a 90°). Al no tenir en compte aquest angle, ens han sortit resultats amb

un error més gran (una mitjana del 24% d'error relatiu en el mètode 1, i del 20% en el mètode 2).

Un altre factor que també pot influir en el resultat és la distància Terra-Lluna, ja que aquesta és variable i això fa variar lleugerament l'angle d'observació. I també crec que aquest angle pot variar (encara que molt poc) a mesura que va transcorrent la nit, pel moviment de rotació de la Terra.

Una altra causa d'error és el fet de no tenir en compte en els càlculs la curvatura de la Lluna. Així, depenent de si un cràter està en el centre de la Lluna o a un costat (segons el nostre angle de visió) veurem una ombra diferent.

També crec que la situació del cràter en la Lluna és clau. Com més a prop estigui el cràter del terminador, més gran veurem la seva ombra, i per tant, hi haurà menys marge d'error, ja que ens serà més fàcil mesurar-la amb precisió. Per això he seleccionat cràters bastant propers al terminador (que a més es veuen millor definits).

Finalment, existeix l'error humà en fer els càlculs, ja que en haver de seleccionar manualment en el Photoshop l'ombra i la distància al terminador, assenyalar un píxel més o un píxel menys pot modificar el resultat. A més, havia de seleccionar sempre un rectangle de manera que la seva diagonal fos la que necessitava mesurar, tenint en compte que aquesta seguís direcció dels rajos solars, cosa que vaig fer amb la màxima precisió possible.

Així doncs, per minimitzar l'efecte en els resultats dels factors citats, s'haurien de tenir en compte totes aquestes variables. Per això, en els annexos, he analitzat com es podrien incorporar els dos primers factors esmentats, que crec que són els que més influeixen en el resultat: l'angle de visió Terra-Lluna-Sol (veure annex 6), i la curvatura de la Lluna (veure annex 5). També podria haver realitzat diversos mesuraments de l'ombra i distància amb el Photoshop, i així, hagués obtingut un resultat més exacte. I finalment també crec que hagués estat necessària una fotografia amb el terminador complet, per poder-lo traçar al llarg de tota la imatge.

Analitzant ara les taules dels resultats, veiem que en el mètode 2 ens surt una incertesa relativa respecte al valor trobat molt petita (de l'1 al 3%), cosa que considero una mica irreal després de totes les causes d'error esmentades. A més, veiem que hi ha molta diferència entre ambdues incerteses relatives en els dos mètodes (en el primer del 13 al 30%). En relació als resultats obtinguts, generalment en la imatge de la Lluna creixent són bastant exactes (excepte en els cràters Porter i Gruemberger en el mètode 2). En canvi en

la imatge de la Lluna minvant, s'incrementen els errors relatius fins a un 55% (excepte en el cràter Burg i el Macrobius, Daniell i Romer en el mètode 2). Això és, com ja s'ha dit, perquè l'angle de visió en la Lluna minvant era inferior a 90° , i per tant, al no tenir-ho en compte, ens surten valors més petits que l'altura real.

Per finalitzar, vull expressar la meua satisfacció pel treball realitzat i per haver escollit aquest tema, ja que encara que hagués pogut tenir en compte els factors detallats per millorar els resultats, m'ha servit per constatar la dificultat de dur a terme amb rigor els estudis científics, que la metodologia emprada és molt important i que és pràcticament impossible tenir en compte tots els factors condicionants. Sempre hi haurà obstacles que compliquin el desenvolupament de l'estudi, però aprendre a superar-los o a minimitzar-los és també un altre objectiu molt important i que aporta molt de coneixement.

Així doncs, amb el meu treball, crec que he après el que comporta desenvolupar un estudi o una recerca, i a més he obtingut una visió molt general, però molt real, de la tasca d'aquelles persones que es dediquen a l'estudi d'aquests temes, l'astronomia i l'astrofísica: a l'estudi de l'Univers.

9. Bibliografia

9.1. Pàgines web

TAKAHASHI, Toa-150 Triplet Ortho Apochromat: <http://www.takahashi-europe.com/en/TOA-150.php> [consulta de 27 d'agost de 2012]

ASTROCITY, Cursos de Astronomía y Astrotienda. CCD QHY9 Monocroma astrofotografía cielo profundo: <http://www.astrocity.es/ccds-qhy-camaras-astrofotografia-/551-ccd-qhy9-monocroma-astrofotografia-cielo-profundo.html> [consulta de 27 d'agost de 2012]

MAIN, IAN. Física mazuerista. Lentes convergentes y divergentes: <http://fisicamazuera.wordpress.com/fisica-mazuerista/lentes-convergentes-y-divergentes/> [consulta de 12 d'agost de 2012]

MALLIK, U. y SOMANTRI, LIFIANA. Many faces of light: As Newton saw it, with some magic tricks: <http://www.physics.uiowa.edu/~umallik/adventure/geo-optics/lightnw.htm> [consulta de 12 d'agost de 2012]

ASOCIACIÓN ASTRONÓMICA CIELO DEL GUARDIA, El telescopio reflector: http://www.cielodeguadaira.org/index.php?option=com_content&task=view&id=50&Itemid=26 [consulta de 16 d'agost de 2012]

SÁNCHEZ, GUSTAVO. Captando el cosmos, Blog de astronomía y astrofotografía. El telescopio refractor: <http://captandoelcosmos.wordpress.com/2012/03/26/el-telescopio-refractor/> [consulta de 16 d'agost de 2012]

ESPEJOS Y LENTES: <http://premium.enciclonet.com/flash/espejos.swf> [consulta de 16 d'agost de 2012]

BEARDSMORE, MARILYN. Easytorecall uk web direction. A simple explanation of how telescopes work: http://www.easytorecall.com/how_telescopes_work.htm [consulta de 16 d'agost de 2012]

WIKIPEDIA, La enciclopedia libre. Charge-Coupled device: http://es.wikipedia.org/wiki/Charge-coupled_device [consulta de 16 d'agost de 2012]

CNN EXPANSIÓN. Existe agua en la Luna: Nasa: <http://www.cnnexpansion.com/actualidad/2009/11/13/existe-agua-en-la-luna-nasa> [consulta de 25 d'agost de 2012]

WIKIPEDIA, La enciclopedia libre. Luna: <http://es.wikipedia.org/wiki/Luna> [consulta de 25 d'agost de 2012]

PARRA, JOSÉ LUIS. El firmamento. *La Luna: estructura interna*: <http://elfirmamento.wordpress.com/2008/12/17/la-luna-estructura-interna/> [consulta de 25 d'agost de 2012]

DEL RAMO, ANTONIO y GUILLÉN, FRANCISCO. Región de Murcia Digital. *Los minerales: plagioclasa*: http://www.regmurcia.com/servlet/s.Sl?sit=c,365,m,108&r=ReP-26865-DETALLE_REPORTAJESABUELO [consulta de 25 d'agost de 2012]

VIERU, TUDOR. Softpedia. *El manto de la Luna es similar al de la Tierra*: <http://news.softpedia.es/EL-manto-de-la-Luna-es-similar-al-de-la-Tierra-146243.html> [consulta de 25 d'agost de 2012]

EL MUNDO CIENCIA. *El núcleo de la Luna es similar al de nuestro planeta*: <http://www.elmundo.es/elmundo/2011/01/07/ciencia/1294397487.html> [consulta de 25 d'agost de 2012]

ASTROMIA. *El origen de la Luna*: <http://www.astromia.com/tierraluna/origenluna.htm> [consulta de 25 d'agost de 2012]

PROYECTO CELESTIA. *La formación de la Luna*: <http://celestia.albacete.org/celestia/celestia/tierra/3forma.htm> [consulta de 25 d'agost de 2012]

BALAGUER ROSA, RAFAEL. Tel·lúrium, Ciència Transversal. *La data de la creació*: <http://www.telurium.net/?q=content/la-data-de-la-creaci%C3%B3> [consulta de 26 d'agost de 2012]

ASTROMIA. *Las fases de la Luna*: <http://www.astromia.com/tierraluna/fasesluna.htm> [consulta de 27 d'agost de 2012]

YAHOO. *¿Es cierto que la Luna se alejará de la Tierra con el tiempo?*: <http://mx.answers.yahoo.com/question/index?qid=20100525103656AACekpt> [consulta de 29 d'agost de 2012]

WINDOWS TO THE UNIVERSE: http://www.windows2universe.org/the_universe/uts/moon1.html&lang=sp [consulta de 29 d'agost de 2012]

ASTEROMIA. *La órbita de la Luna*: <http://asteromia.net/luna/la-luna-orbita.html> [consulta de 29 d'agost de 2012]

THE FULL MOON ATLAS, The lunar navigator. *Interactive maps of the moon:*
<http://www.lunasociety.org/atlas/index.shtml> [consulta de 18 de setembre de 2012]

PANORÁMICA DE LA LUNA. *Gran foto de la Luna con sus cráteres y mares más importantes, ideal para iniciados con telescopios:*
http://www.portalplanetasedna.com.ar/panoramica_luna.htm [consulta de 18 de setembre de 2012]

LÓPEZ SÁNCHEZ, ÁNGEL R. *Prácticas de Física del Cosmos, Universidad de la Laguna. Práctica 6: la ortografía de la Luna:*
<http://trcortes.webs.ull.es/Megatecla/imagenes/practicas/prfc62005.pdf> [consulta de 18 d'octubre de 2012]

9.2. Descàrregues

DIFFRACTION LIMITED. *Maxim DL Pro Version 5:*
http://www.cyanogen.com/maxim_main.php [consulta de 15 de setembre de 2012]

VIRTUAL MOON ATLAS: <http://virtual-moon-atlas.uptodown.com/descargar> [consultes freqüents]

9.3. Llibres i revistes

RIDPATH, IAN. *Astronomía*. 1a ed., Madrid: Espasa, 2007

BAKER, JOANNE. *50 cosas que hay que saber sobre el Universo*. 1a ed., Barcelona: Ariel, 2011

CERDÀ, XIMO. *El llibre de l'astronomia*. 1a ed., Barcelona: Editorial Barcanova, 2011

KIRK, TIM. *Physics. IB study guides*. 2a ed., Oxford: Oxford University Press, 2007

TOLA, JOSÉ – INFIESTA, EVA. *Atlas d'astronomia*. 1a ed., Barcelona: Parramón, 2001

REES, MARTIN. *Universo*. 1A de., Madrid: Pearson Alhambra, 2006 (colecció: La guía visual definitiva)

MENDIOLAGOITIA, ÁLEX. *¿Cómo hacer una observación lunar?* Revista *Astronomía*. II Época – Año XXVII – Nº 154.

AGRUPACIÓ D'ASTRONOMIA I CIÈNCIA DEL PLA DE L'ESTANY. *El butlletí d'Astrobanyoles*. Nº 2-octubre 2011

10. Annexos

10.1. Annex 1: Complement d'òptica

Refracció i reflexió

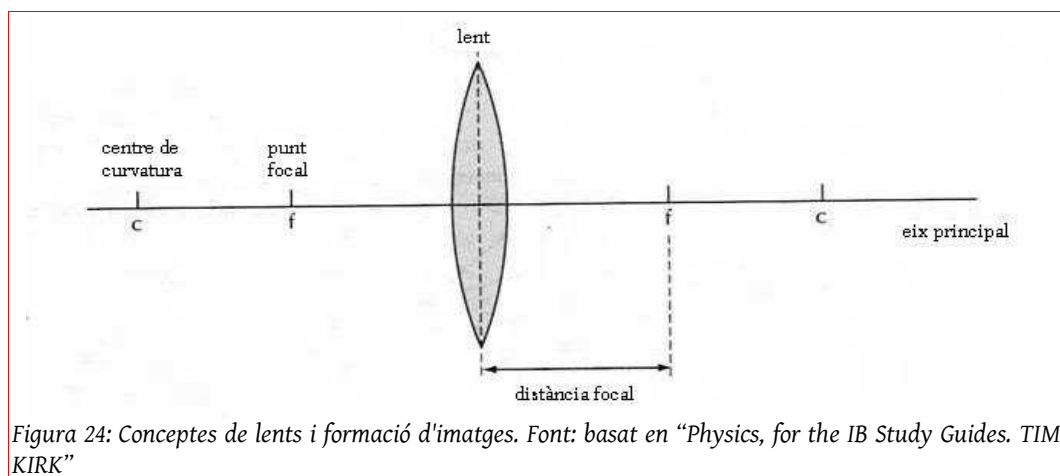
Per conèixer les lents i els miralls, és necessari introduir aquests dos termes. La **reflexió** és el canvi de direcció d'un raig o una ona que es produeix en la superfície que separa dos mitjans, tornant així al mitjà inicial. La **refracció**, en canvi, consisteix en la modificació de la trajectòria d'una ona, al travessar la superfície que delimita dos mitjans. A més en aquest últim cas, també varia la velocitat de propagació de l'ona.

Imatge virtual i real

També cal diferenciar entre **imatges reals** i **imatges virtuals**. Una imatge virtual és la que es forma per reflexió en un mirall pla, per la qual cosa els rajos no es concentren en un sol punt. En canvi en una imatge real els rajos passen realment per un sol punt, i solen ser formades per miralls còncaus o lents.

Lents

Les lents són objectes, normalment de vidre, limitats per dues superfícies almenys una de les quals és corba. Així, una ona incident es *refracta* travessant el material del que està fet la lent, la qual cosa li permet formar una imatge. Per analitzar les lents i la imatge que formen, abans hem de conèixer alguns termes. Vegem el següent dibuix:



- El *centre de curvatura*, c , és el centre de l'esfera que forma cada curvatura de la lent.
- L'*eix principal* (o *eix òptic*) és una línia que uneix, en teoria, els dos centres de curvatura i que passa pel centre de la lent.
- El *punt focal imatge*, f , és el punt situat en l'eix principal on es forma la imatge d'un objecte situat a l'infinit després de passar per la lent. El de l'altre costat de la lent, se l'anomena *punt focal objecte*.
- La *distància focal*, és la distància que hi ha entre el centre de la lent i el punt focal.

Existeixen dos tipus de lents: les convergents i les divergents. Les **lents divergents** són més gruixudes en els extrems que en el centre, i refracten els rajos de manera que aquests surten en diferents direccions, és a dir tenen la propietat de divergir els rajos. En aquest cas el punt focal és anterior a la lent, allà on les prolongacions de les refraccions dels rajos de llum es troben. S'usen per obtenir imatges disminuïdes, i per corregir la miopia gràcies al seu gran poder refractiu, ja que aquestes persones formen la imatge abans de la retina, i així la lent divergent fa que puguin enfocar bé.

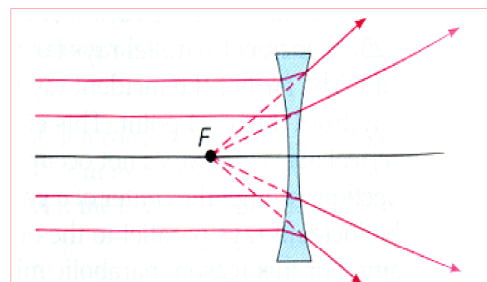


Figura 25: Lent divergent i el seu punt focal.
Font: <http://www.physics.uiowa.edu/~umallik/adventure/geo-optics/lightnw.htm>

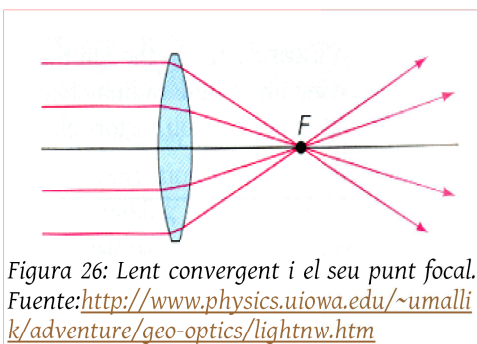


Figura 26: Lent convergent i el seu punt focal.
Fuente: <http://www.physics.uiowa.edu/~umallik/adventure/geo-optics/lightnw.htm>

Les **lents convergents** són més gruixudes en el centre que en els extrems, i el que fan és refractar rajos paral·lels d'ones cap al mateix punt, el punt focal. Són utilitzades per ampliar les imatges (com les lupes) i per exemple per corregir la hipermetropia, ja que aquestes persones formen la imatge després de la retina i així la lent convergent fa que la imatge es formi abans.

Miralls

Un mirall és una superfície polida, normalment de vidre, en la qual la llum incident es reflecteix amb molt poca dispersió. Poden ser plans o esfèrics (còncaus o convexos).

Parlant dels **miralls plans**, si col·loquem un objecte davant, es formarà una imatge. Aquest procés ocorre ja que de l'objecte surten en totes direccions feixos de llum. Cada raig que incideix en el mirall es reflectirà seguint les lleis de la reflexió²⁷, i aquests rajos seran percebuts per l'observador. Així, traçant el diagrama, trobem que la imatge que es forma és virtual, està a la mateixa distància darrere del mirall que l'objecte de davant, és directa (no invertida), és de la mateixa mesura que l'objecte i està invertida lateralment.

Els **miralls esfèrics convexos**, tenen la propietat de divergir els rajos de llum, és a dir els envien en totes direccions. Així doncs, el punt focal imatge és virtual ja que està darrere del propi mirall, i és la prolongació de les refraccions dels rajos. En aquests miralls la imatge sempre serà menor que l'objecte real, directa i virtual. S'utilitzen per exemple en els retrovisors dels cotxes.

Finalment els **miralls esfèrics còncaus** fan que tots els rajos que incideixen sobre ell vagin a un mateix punt, el punt focal imatge. La formació de la imatge dependrà de la distància a la qual es trobi l'objecte, ja que tant pot ser real com virtual, directa o invertida, i major menor o igual que la mesura de l'objecte.

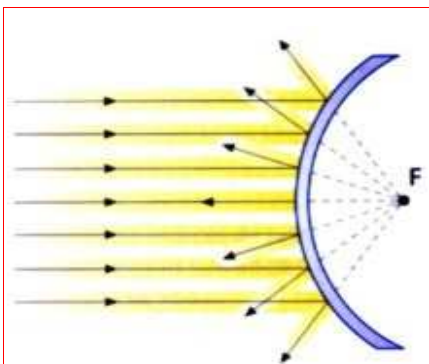


Figura 27: Mirall esfèric convex i el seu punt focal.

Font:<http://luismiqueldiez.blogspot.com.es/2011/02/unidad-5-la-luz.html>

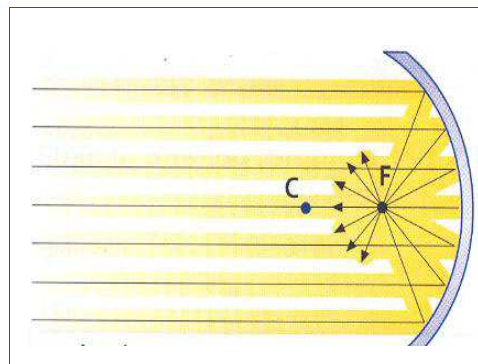


Figura 28: Mirall esfèric còncau i el seu punt focal.

Font:http://fresno.pntic.mec.es/msap0005/2eso/2ESO-anterior/tema_5.htm

²⁷ 1a llei: el raig incident, el raig reflectit i la normal, es troben en un mateix pla.
2a llei: l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió.

Formació d'imatges

Centrant-nos en els telescopis refractors (l'utilitzat en el telescopi *Takahashi Toa 150*), cal saber com es forma la imatge a partir de les lents. La imatge formada depèn d'on estigui situat l'objecte que volem observar. Així doncs variarà si l'objecte es troba: molt llunyà, exactament al doble que la distància focal, entre el doble de la distància focal i la distància focal, a la distància focal, o més a prop que la distància focal. Solament explicaré com es forma la imatge en el cas que l'objecte sigui molt llunyà, ja que per observar la Lluna és l'únic cas que ens interessa.

Hem de saber com es refracta cada raig: els rajos que vagin paral·lels a l'eix principal o simplement en direcció a aquest (sense passar pel centre òptic), es refractaran cap al punt focal, els rajos que vagin directament cap al punt focal, es refractaran paral·lelament a l'eix principal, i els que passin pel centre òptic no sofreixen desviació.

En el cas que l'objecte estigui molt lluny (com la Lluna), es formarà una imatge real, menor i invertida. Aquest és el diagrama:

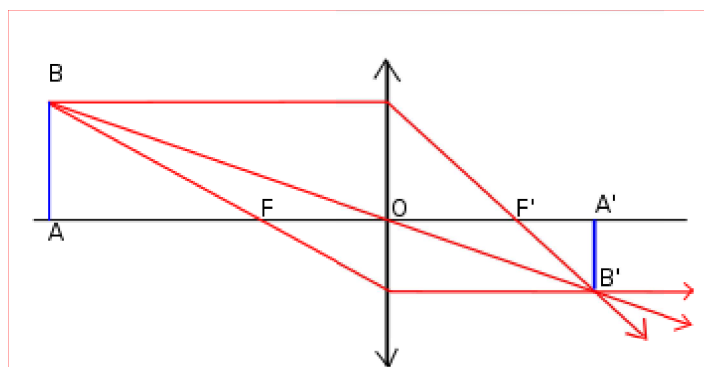


Figura 29: Formació de la imatge, amb una lent convergent, d'un objecte que està més lluny que el doble de la distància focal.

Font: <http://es.wikibooks.org/wiki/F%C3%ADsica/%C3%93ptica/Lentes>

10.2. Annex 2: Efecte fotoelèctric

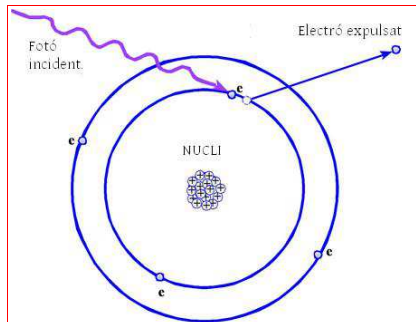


Figura 30: Efecte fotoelèctric.

Font: http://ocw.unia.es/fisica/origen-y-control-de-las-radiaciones-en-el-medio/materiales/ud2/unidad-didactica-2/skinless_view

L'any 1887, H.Hertz²⁸ va descobrir que a l'incidir una radiació electromagnètica sobre una superfície metàl·lica es desprenen electrons. Aquest fenomen es va conèixer amb el nom d'**efecte fotoelèctric**. De totes maneres, hi ha unes certes condicions perquè es desprenguin electrons, ja que es produeix solament si la freqüència de radiació és major a una freqüència llimar, f_0 , diferent per a cada metall. A més, els electrons emesos tenen una energia cinètica, E_c , que augmenta solament amb la freqüència de radiació, no amb la intensitat.

L'any 1905, A.Einstein²⁹ va proposar que la llum estava formada de “paquets” d'energia, els *fotons*, els quals no tenien massa però sí quantitat de moviment. Va dir que els electrons de la superfície necessiten una certa energia, W_0 (*energia llimar del metall*) per escapar de l'atracció dels nuclis. Partint de la fórmula de M.Planck³⁰ sobre l'energia dels fotons, Einstein va deduir que un fotó (de freqüència f i energia hf) a l'incidir sobre una superfície, cedeix tota la seva energia a un electró. Aquesta energia absorbida per l'electró, si és major que l'energia llimar del metall, farà que l'electró s'escapi de la superfície del metall, i a més, l'energia extra, la utilitzarà per incrementar la seva energia cinètica. D'aquí, Einstein va deduir que l'energia d'un fotó (hf) és igual a l'energia llimar del metall (W_0) més l'energia cinètica que obté l'electró (E_c)³¹. Per això, es considera la llum com una dualitat on-partícula.

²⁸ Heinrich Hertz, (Hamburg, 22 de febrer de 1857 – Bonn, 1 de gener de 1894).

²⁹ Albert Einstein, (Ulm, Alemanya, 14 de març de 1879 – Princeton, Estats Units, 18 d'abril de 1955).

³⁰ Max Planck, (Kiel, Alemanya, 23 d'abril de 1858 – Gotinga, Alemanya, 4 d'octubre de 1947). Fórmula de l'energia dels fotons: $E = h \cdot f$ on h: constant de Planck $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

³¹ $h \cdot f = W_0 + E_c$

10.3. Annex 3: Fotografies de la Lluna per parts

Les següents imatges són les que sortiran a la pàgina web, ja que per ampliar la imatge gran de la Lluna, s'haurà de seleccionar un sector, i a partir d'aquests, els relleus sortiran identificats mitjançant un enllaç per a cadascun d'ells.

Les zones de la Lluna creixent són:



Figura 31: Lluna creixent, zona 1 (Crisium)



Figura 32: Lluna creixent, zona 2 (Tranquillitatis - Fecunditatis)

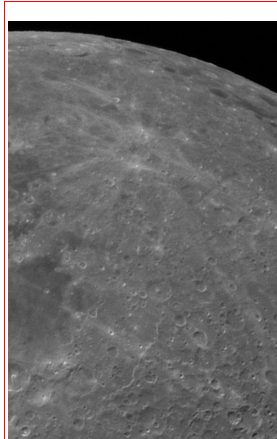


Figura 33: Lluna creixent, zona 3 (Nectaris-Stevinus)



Figura 34: Lluna creixent, zona 4 (Maurolycus - Manzinus)



Figura 35: Lluna creixent, zona 5 (Serenitatis - Aristoteles)



Figura 36: Lluna creixent, zona 6 (Serenitatis - Vaporum)



Figura 37: Lluna creixent, zona 7 (Ptolemaeus - Alphonsus)



Figura 38: Lluna creixent, zona 8 (Tycho-Clavius)

I les zones de la Lluna minvant:



Figura 39: Lluna minvant, zona 1 (Serenitatis - Atlas)



Figura 40: Lluna minvant, zona 2 (Serenitatis - Vaporum)



Figura 41: Lluna minvant, zona 3 (Theophilus - Ptolemaeus)

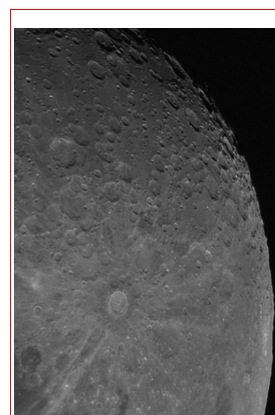


Figura 42: Lluna minvant, zona 4 (Tycho - Clavius)



Figura 43: Lluna minvant, zona 5 (Imbrium - Plató)

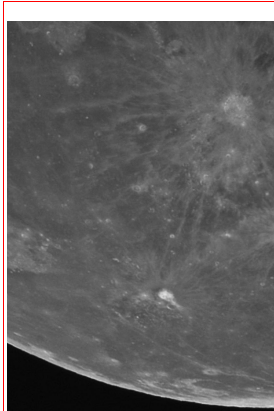


Figura 44: Lluna minvant, zona 6 (Imbrium - Copernicus)

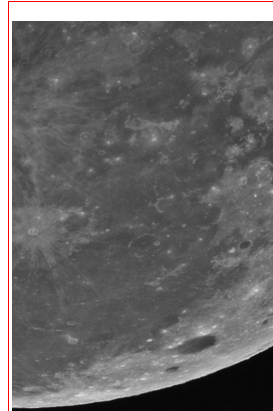


Figura 45: Lluna minvant, zona 7 (Insolarum - Kepler)



Figura 46: Lluna minvant, zona 8 (Humorum)

10.4. Annex 4: Situació dels cràters calculats

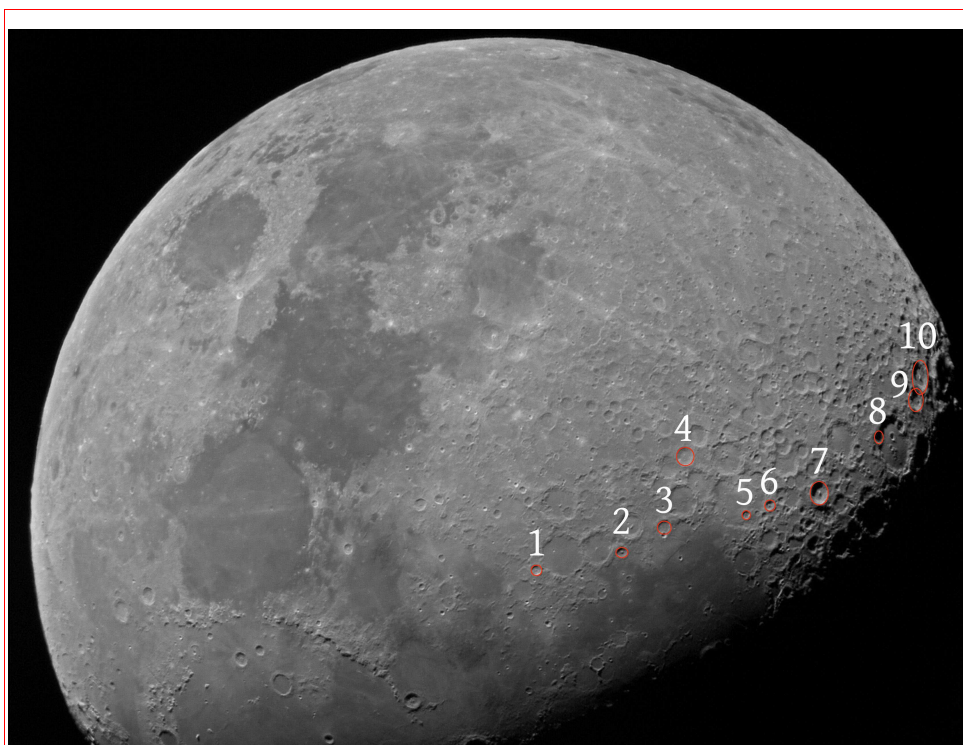


Figura 47: Cràters calculats en les taules 2 i 3. Lluna creixent.



Figura 48: Cràters calculats en las taules 2 i 3. Lluna minvant.

10.5. Annex 5: Millora 1 - Curvatura de la Lluna

Exemple d'unes pràctiques del Departament d'Astrofísica de la Universitat de la Laguna, on es té en compte la curvatura de la Lluna.

4.2 Cálculo del tamaño real

Aunque nos parezca que la Luna es un disco sobre el fondo del cielo, se trata de un cuerpo tridimensional, una esfera (en primera aproximación). Por lo tanto, las variaciones angulares de las estructuras NO tendrán un tamaño igual en su centro o en su borde: nos parecerán más pequeñas en los bordes. Para calcular el tamaño real tendremos que corregir, por tanto, la **curvatura** de la Luna. Se puede hacer aplicando la siguiente relación:

$$\text{corrección curvatura} = \frac{1}{\cos \lambda \times \cos \beta} \quad (4)$$

donde λ y β son las coordenadas lunares (en grados) del objeto que estemos estudiando, longitud lunar y latitud lunar. Estos parámetros se pueden conocer usando un atlas. En realidad, la ecuación (4) no es del todo correcta. Supone que la Tierra está en el cénit en la posición (0,0) de la Luna, pero esto no es así. En realidad, se aparta unos pocos grados, aunque esa variación cambia con el tiempo debido a los movimientos del sistema Tierra-Luna. El punto de la superficie lunar en el que la Tierra se encuentra justo en el cénit se llama **punto sub-terrestre**. Suele venir en programas de planetario o en tablas de efemérides. La corrección de curvatura se tendría que escribir, entonces, como:

$$\text{corrección curvatura} = \frac{1}{\cos(\lambda - \lambda') \times \cos(\beta - \beta')} \quad (5)$$

donde λ' y β' son las coordenadas lunares (en grados) del punto sub-terrestre.

Por lo tanto, el tamaño de una estructura sobre la superficie será:

$$L = \frac{L'}{\cos(\lambda - \lambda') \times \cos(\beta - \beta')} = \frac{n^\circ \text{ píxeles} \times x}{\cos(\lambda - \lambda') \times \cos(\beta - \beta')} \quad (6)$$

4.3 Cálculo de la altura de una montaña lunar

Usaremos un método aproximado, pero bastante preciso. En la *Figura 3* se encuentran esquematizados los elementos básicos del problema. Necesitamos conocer la altura del Sol sobre el horizonte, α , en las coordenadas lunares de nuestra montaña. Con esta altura, usando trigonometría sencilla, se deriva directamente la altura, h , de la montaña. Para calcular α necesitamos conocer, además del tamaño real, L , de la sombra:

- La **longitud y latitud lunar**, λ y β , de la montaña o pico del que vamos a calcular su altura.

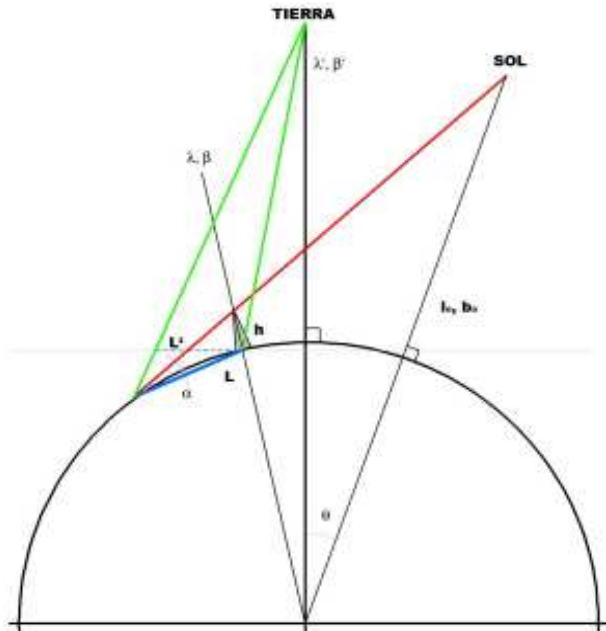


Figura 3. Esquema básico para calcular la altura, h , de una montaña sobre la Luna conociendo la longitud de su sombra, L , una vez corregida por curvatura (L'). λ y β son las coordenadas de la montaña de la Luna, λ' y β' las coordenadas del punto sub-terrestre y l_0 y b_0 las coordenadas del punto sub-solar. α es la altura del Sol desde la montaña lunar a estudiar.

- Las coordenadas del **punto sub-terrestre**, λ' y β' , el punto de la Luna en el que se tiene a la Tierra justo en el cenit
- Las coordenadas **del punto sub-solar**, l_0 y b_0 , el lugar de la Luna en el que se tiene al Sol justo en el cenit. l_0 está relacionada con la *colongitud selenográfica* del Sol, Co , que suele venir en las efemérides, de la forma $Co = 90^\circ - l_0$. La *colongitud selenográfica* del Sol es la longitud lunar del terminador matutino, esto es, la longitud lunar *por la que está saliendo el Sol*.

Con esto, la altura del Sol sobre el horizonte en nuestra montaña es:

$$\alpha = \arcsen[\sen\beta \times \sen b_0 + \cos\beta \times \cos b_0 \times \sen(Co + \lambda)] \quad (7)$$

Por lo tanto, la altura h de la montaña de la Luna será, simplemente:

$$h = L \times \tan\alpha \quad (8)$$

Pero esta ecuación sólo sería válida si las tres direcciones básicas del problema (dirección de la posición de la montaña - centro de la Luna, dirección centro de la Tierra – centro de la Luna y dirección centro de la Luna – Sol) estuviesen en el mismo plano, como ocurre en la *Figura 3*. En realidad, esto tampoco ocurre, aunque se desvían poco. Sería necesario conocer, entonces, el ángulo, θ , formado entre la Tierra y el Sol si miráramos desde el centro de la Luna:

$$\theta = \arccos[\sen\beta' \times \sen b_0 + \cos\beta' \times \cos b_0 \times \cos(\lambda' - l_0)] \quad (9)$$

transformándose la ecuación (8) en

$$h = L \times \frac{\sen\alpha}{\sen\theta} - \frac{L^2}{2R_L} \frac{\cos^2\alpha}{\sen^2\theta} \quad (10)$$

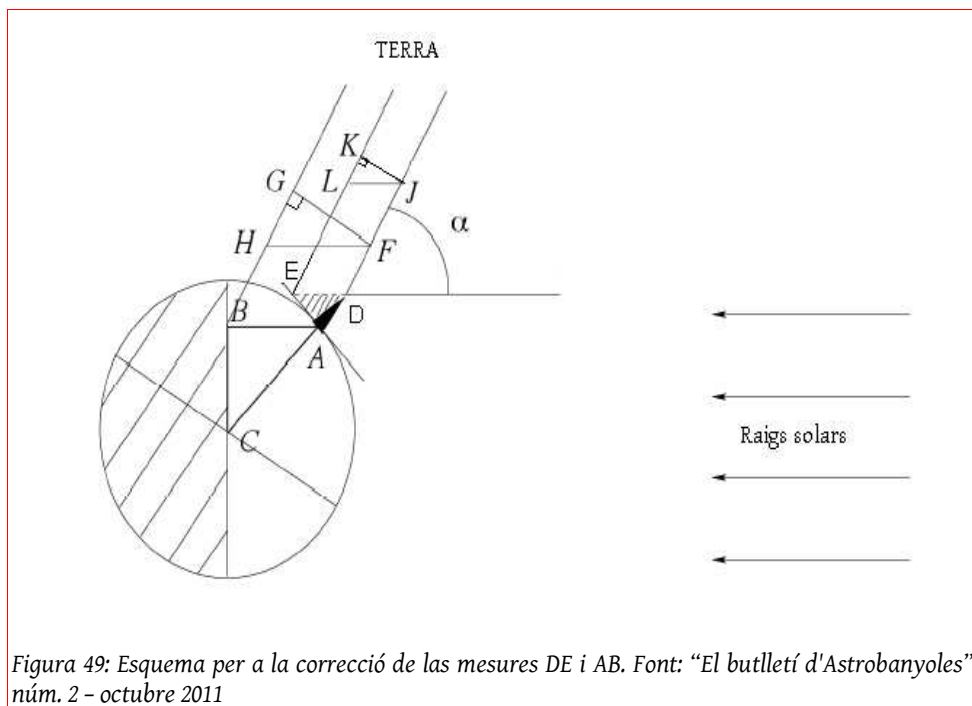
donde R_L es el radio de la Luna, 1734 km.

10.6. Annex 6: Millora 2 - Angle Terra-Lluna-Sol

Aquest càlcul de les altures d'un relleu tenint en compte l'angle Terra-Lluna-Sol està inspirat en un article publicat en la revista “El butlletí d'Astrobanyoles” núm. 2, octubre 2011, de l'Agrupació Astronòmica de Banyoles, i ampliat amb desenvolupament propi.

Com he comentat en les conclusions, l'angle Terra-Lluna-Sol influeix a l'hora de calcular l'altura d'un relleu. Una possible millora de l'estudi seria tenir en compte aquest factor, per la qual cosa seguidament explicaré com es podria fer (seguint l'exemple de la fórmula del mètode 1):

Hem explicat a la pàgina 26 que l'ombra que veiem des de la Terra és la zona que va del cim del relleu fins a la superfície lunar (ED). Quan l'angle Terra-Lluna-Sol és de 90° (Lluna en quart creixent o quart minvant), veuríem realment ED, però si l'angle és inferior (com en la figura 49), en realitat veuríem KJ, que és inferior a ED. Igualment per a la distància al terminador, que en 90° veuríem BA, i en un angle inferior, GF.



Vegem com podríem tenir en compte aquest factor.

Si l'angle Terra-Lluna-Sol, val α , els angles GHF i KLJ també seran α (ja que tots estan delimitats per rectes paral·leles). Així doncs, es verifica que:

$$\sin \alpha = \frac{GF}{HF} = \frac{KJ}{LJ}$$

I aïllant la distància al terminador real (BA que és el mateix que HF) i l'ombra real (ED que és el mateix que LJ), trobem que:

$$BA = HF = \frac{GF}{\sin \alpha}$$

$$ED = LJ = \frac{KJ}{\sin \alpha}$$

Ara, substituïm aquestes dues igualtats en la fórmula del mètode 1 que hem trobat per calcular l'altura de la muntanya (veure p.28), i ens queda:

$$DA = \frac{ED \cdot BA}{CA} = \frac{\frac{KJ}{\sin \alpha} \cdot \frac{GF}{\sin \alpha}}{CA} = \frac{KJ \cdot GF}{CA \cdot \sin^2 \alpha}$$

I substituint els segments pels seus significats

$h=DA$; $s=KJ$ (ED en el cas de 90°); $d=GF$ (BA en el cas de 90°); $r=CA$:

$$h = \frac{s \cdot d}{r \cdot \sin^2 \alpha}$$

Així doncs, si fem la fotografia de la Lluna en quart creixent o quart minvant, l'angle Terra-Lluna-Sol serà de 90° , per la qual cosa: $\sin^2 90 = 1$ i, per tant, la fórmula quedaria tal com ho havíem descrit en l'estudi (veure p.28).

Però si no estem en quart creixent o quart minvant, l'angle no serà de 90° , per la qual cosa el seu sinus sempre serà inferior a 1. L'ombra que veurem des de la Terra (KJ) serà més petita que la real (ED=LJ), ja que LJ és la hipotenusa del triangle rectangle mentre que KJ és un catet. El mateix passa amb la distància al terminador. Per això:

$$KJ < ED \quad \text{i} \quad GF < BA$$

I com que el sinus és més petit que 1 i està en el denominador, el resultat de la fórmula (l'altura real de la muntanya) serà el mateix (es compensa, pràcticament el mesurament més petit de l'ombra i distància, amb el valor del sinus de l'angle).