

Elaboración de un mapa virtual de la Luna

Irina Pi Jaumà

IES Jaume Vicens Vives, curso 2012-2013

Grupo: 2º de Bachillerato A

Tutoría: Maria Lluïsa González Vall-llovera

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin la ayuda de muchas personas, las cuales han mostrado desde el primer momento mucho interés y ganas para que yo pudiera cumplir todos mis objetivos.

En primer lugar, agradecer enormemente a la Agrupación Astronómica de Girona que me facilitasen su telescopio en el Observatorio Can Roig de Llagostera. Agradecer principalmente toda su dedicación a Rafael Balaguer Rosa, presidente de dicha agrupación, que me ha ayudado durante todo el trabajo y me ha guiado cuando me he sentido perdida. Gracias también a Jordi Sesé Puértolas, técnico responsable de la página web de la agrupación, el cual me ha enseñado a configurar y editar mi mapa lunar. Y agradecer también a Josep Maria Petit Prats, operador del observatorio, dado que sin su ayuda las observaciones no hubieran sido posibles.

Agradecer como no, la valiosa colaboración de mi tutora, Maria Lluïsa González Vall-llovera, quién me ha guiado, animado, orientado y respaldado en todo momento. Y sobretodo, por conseguir que, a través del cálculo y la profundización y la resolución de las fórmulas, haya disfrutado mucho en este trabajo.

No puedo olvidar a mi familia, los cuales me han acompañado hasta el centro astronómico en las noches de las observaciones, me han animado y han creído en mi durante toda la realización del trabajo. Han sido, sin duda, un soporte imprescindible.

Y finalmente, gracias a este nuestro satélite, la Luna, por existir, y a todos los científicos que con sus descubrimientos y estudios me han despertado la curiosidad para aprender un poco más de este nuestro maravilloso Universo.

Índice de contenidos

1. <u>Introducción</u>	5
2. <u>Objetivos</u>	6
3. <u>Metodología</u>	7
3.1. <u>Primera etapa: fundamentos teóricos</u>	7
3.2. <u>Segunda etapa: obtención y tratamiento de las imágenes</u>	7
3.3. <u>Tercera etapa: elaboración de una página web</u>	8
3.4. <u>Cuarta etapa: mediciones</u>	8
4. <u>Fundamentos teóricos</u>	9
4.1. <u>La Luna</u>	9
4.1.1. <u>Características generales</u>	9
4.1.2. <u>Formación</u>	10
4.1.3. <u>Estructura</u>	12
4.1.4. <u>Atmósfera</u>	12
4.1.5. <u>Superficie</u>	13
4.1.6. <u>Órbita</u>	14
4.1.7. <u>Fases</u>	16
4.2. <u>El telescopio</u>	16
4.2.1. <u>Tipos de telescopios</u>	17
4.2.2. <u>Formación de imágenes en el telescopio</u>	18
4.3. <u>Tecnología digital</u>	19
4.3.1. <u>Dispositivo de carga acoplada (CCD)</u>	19
5. <u>Obtención y tratamiento de las imágenes</u>	20
5.1. <u>Obtención</u>	20
5.2. <u>Tratamiento</u>	21
6. <u>Elaboración de una página web</u>	24
7. <u>Mediciones</u>	27
7.1. <u>Altura de los relieves: dos métodos posibles</u>	27
7.2. <u>Radio lunar aparente</u>	30
7.3. <u>Factor de escala, f</u>	31
7.4. <u>Sombra y distancia al terminador aparentes</u>	32
7.5. <u>Sombra y distancia al terminador reales</u>	35
7.6. <u>Incertidumbre de los relieves en los dos métodos</u>	36
7.7. <u>Ejemplo del cráter Tycho</u>	40
8. <u>Conclusiones</u>	44
9. <u>Bibliografía</u>	48
9.1. <u>Páginas web</u>	48
9.2. <u>Descargas</u>	50
9.3. <u>Libros y revistas</u>	50
10. <u>Apéndices</u>	51
10.1. <u>Apéndice 1: Complemento de óptica</u>	51
10.2. <u>Apéndice 2: Efecto fotoeléctrico</u>	55
10.3. <u>Apéndice 3: Fotografías de la Luna por partes</u>	56
10.4. <u>Apéndice 4: Situación de los cráteres calculados</u>	58
10.5. <u>Apéndice 5: Cálculo de las alturas corrigiendo la curvatura de la Luna</u>	59
10.6. <u>Apéndice 6: Cálculo de las alturas teniendo en cuenta el ángulo Tierra-Luna-Sol</u>	61

1. Introducción

Siempre me ha fascinado el Universo y el mundo en el que vivimos. Un Universo sorprendente, extraño y desconocido pero a la vez maravilloso. ¿No es apasionante que veamos puntitos de luz en el cielo que realmente son estrellas a miles de años luz? Y que esta luz que vemos, la emitieran las estrellas en un pasado remoto, y que a lo mejor muchas de ellas ya no existen. ¿O no es inimaginable que el Universo se esté expandiendo y no sepamos lo que pasará en un futuro? ¿Se me ocurrirían tantas incógnitas sin respuesta! Y es que ocupamos un lugar tan insignificante en este inmenso Universo que intentamos dar una explicación y comprender todos sus fenómenos para entender también nuestra situación y el porqué estamos aquí. Verdaderamente, en este infinito Universo, ¿no hay vida en ningún otro lugar?

Me deja tan intrigada el mundo de la astronomía, que siempre he sabido que quería hacer un trabajo sobre este tema. Así que en la siguiente monografía me he centrado en el cuerpo celeste que mejor conocemos a parte de nuestro propio planeta Tierra y el único que el hombre ha visitado, el cuerpo más próximo a nosotros y que nos ilumina en las noches oscuras: nuestra vecina, la Luna.

La Luna es el único satélite natural de la Tierra y el único las características del cual podemos observar con una cierta precisión a simple vista. Pero no es, ni mucho menos, el único satélite del Universo, sino que hoy en día sabemos que todos los demás planetas, excepto Mercurio y Venus, tienen al menos una luna. Muchos poetas y artistas se han inspirado a lo largo de la historia con nuestra Luna, ya que es de una gran belleza. Pues imaginémosnos cómo de bello podría ser la escena de ver en el cielo unas cincuenta lunas, como tienen, cada uno, Saturno y Júpiter.

Así pues, aunque no tengamos cincuenta lunas, esto hace más especial la nuestra, y personalmente hablando, ésta siempre me ha tenido cautivada. Por su belleza, su luz, las distintas formas que vemos de ella desde la Tierra, sus historias y mitos, su influencia sobre nosotros... Por esto en el siguiente trabajo quiero resolver algunos de los misterios que ésta me suscita así como, a partir de observaciones con un telescopio, poder configurar un mapa lunar y contemplar la belleza de este magnífico satélite con mucha más precisión que sin ningún instrumento.

2. Objetivos

Los objetivos que me he propuesto en mi trabajo son:

- Introducirme en el mundo de la astronomía y aprender cómo funciona un telescopio.
- Introducirme en el uso de un programa adecuado para transformar las imágenes ópticas de las observaciones de la Luna en señales digitales, así como otros programas de tratamiento de las imágenes que me permitirán llevar a cabo el diseño del mapa virtual.

Y más especialmente:

- **Configurar el mapa de la Luna a partir de las imágenes extraídas de las observaciones directas con un telescopio.**
- **Elaborar una página web con el mapa lunar y toda la información posible de sus cráteres, mares o montañas.**
- **Verificar la altura de algunos de los relieves más característicos de la Luna.**

Mi principal duda cuando me fijé estos objetivos era si sería realmente posible medir las alturas de los cráteres lunares a partir simplemente de una fotografía.

3. Metodología

El proceso de realización de este trabajo lo podríamos dividir en cuatro etapas: búsqueda teórica; observaciones con el telescopio y tratamiento de las imágenes; configuración del mapa virtual lunar y elaboración de una página web; y finalmente, cálculo de la altura de algunos cráteres o montañas de este satélite.

3.1. Primera etapa: fundamentos teóricos

Para poder hacer un estudio o trabajo sobre cualquier tema, antes que todo es necesaria una base teórica para ser capaz de entender de forma mucho más precisa diversos aspectos de éste. En el caso de la Luna, me servirá para poder entender su comportamiento, su estructura física y composición, entre otros. Así que en primer lugar en mi trabajo constan unos fundamentos teóricos de la Luna, pero también de telescopios y de tecnología digital, necesarios para la observación de este satélite. Toda la información ha sido encontrada en las páginas web o libros que constan en la bibliografía.

3.2. Segunda etapa: obtención y tratamiento de las imágenes

En segundo lugar, haré todas las observaciones de la Luna en el Observatorio Can Roig de Llagostera, en el cual los miembros de la Agrupación Astronómica de Girona me prestan sus materiales.

Para la captura de las imágenes empecé utilizando un sistema pero ciertos problemas me obligaron a cambiar el método.

El sistema inicialmente previsto era hacerlo mediante un telescopio modelo *Takahashi Mewlon 210* de 8 pulgadas de apertura (20 cm de diámetro) que funciona mediante espejos, por lo que es de tipo reflector Newtoniano. Además, adaptando una cámara *Philips Toucam Pro II* al telescopio, se pueden hacer observaciones a mucho más aumento que con el simple ocular (aumento de 2000).

La intención era, con este equipo conectado al ordenador, y con el programa *K3CCDTools*¹, que transforma las señales ópticas en señales digitales, capturar vídeos de partes concretas de la Luna para, seguidamente, con el programa *RegiStax V6*² fusionar fotogramas y obtener una imagen estática de mayor calidad que si se captura directamente ésta.

El problema fue que debido a las turbulencias atmosféricas que se producen por el calor del verano, no conseguíamos imágenes suficientemente nítidas que nos proporcionaran

¹ Proporcionado por los miembros de la Agrupación Astronómica de Girona.

² De descarga gratuita

una buena calidad. Por ello, después de varios intentos, decidimos con los miembros de la Agrupación Astronómica cambiar el método y capturar directamente imágenes estáticas, ya que a este sistema no le afectan tanto las turbulencias atmosféricas.

Para ello, utilizamos un telescopio modelo *Takahashi Toa 150* de 6 pulgadas de apertura (unos 15 cm de diámetro) que funciona mediante lentes, por lo que es refractor y apocromático. También utilicé una cámara CCD³ *QHY9* adaptada al telescopio y todo ello conectado al ordenador.

Para capturar las imágenes, en este caso lo hice con el programa *Maxim DL Pro Version 5*⁴, el cual nos permite configurar el filtro para obtener imágenes de más calidad. Finalmente, después de escoger las mejores imágenes, el programa *Photoshop*⁵ es ideal para retocarlas, pudiendo cambiar el brillo o por ejemplo el contraste.

3.3. Tercera etapa: elaboración de una página web

Una vez he tenido las imágenes de la Luna (una en el cuarto creciente y una en el cuarto menguante) he podido configurar el mapa virtual lunar. Además, he elaborado una página web, por lo que para hacer esto también he necesitado otros dos programas: el *Adobe Dreamweaver* me ayudó en la edición, construcción y diseño de la página web, y la opción de *Image Ready* del *Photoshop*, me permitió convertir una parte de una imagen en un enlace de la página web. Para ello necesité algún soporte que me ayudase a identificar todos los cráteres, mares y montañas de la superficie lunar, por lo que el *Virtual Moon Atlas*⁶ me sirvió para hacerlo. Y además, del programa *Celestia*⁷ saqué las constantes lunares.

3.4. Cuarta etapa: mediciones

Para finalizar, he calculado la altura de algunos cráteres y para esto, antes que todo tuve que medir la sombra en la fotografía de cada uno de estos accidentes geográficos. Para hacerlo con menos incertidumbre, utilicé el *Photoshop*. A continuación, calculé la altura real de los relieves, utilizando simples cálculos de trigonometría, basándonos en los triángulos semejantes.

³ Véase Tecnología digital.

⁴ Proporcionado por los miembros de la Agrupación Astronómica de Girona.

⁵ Obtención propia.

⁶ De descarga gratuita.

⁷ De descarga gratuita.

4. Fundamentos teóricos

4.1. La Luna

La Luna es el único satélite natural de la Tierra, es decir, el único cuerpo celeste no fabricado por el hombre que órbita alrededor de nuestro planeta. Desde la Tierra vemos que brilla, pero eso es debido a que refleja la luz del Sol, no tiene luz propia (cuando hay Luna llena, se refleja un 7% de la luz solar). Es un cuerpo esférico, sólido (de roca fría), y con una atmósfera muy frágil ya que la fuerza de gravedad no puede sujetar una atmósfera más grande porque no es suficientemente fuerte. Antiguamente hubo actividad volcánica, pero hoy en día hay muy poca actividad, a parte de los TLP⁸. Así que la Luna es, actualmente, un mundo bastante paralizado y en principio sin vida, donde predominan los colores grises. Aun esto, en el año 2009⁹ se hizo hallazgo de restos de agua en la Luna, aunque se debe investigar más profundamente.

En cuanto al tamaño, es relativamente grande ya que es el quinto satélite más grande del Sistema Solar, y en comparación con su planeta se puede llegar a decir que se trata de un sistema binario Tierra-Luna. Esto es así porque la Luna es 1/81 veces la masa de la Tierra, un dato considerablemente grande comparándolo con la masa de Ganímedes¹⁰ que es 1/12500 la de Júpiter.

Es además el primer astro donde ha llegado el hombre, ya que es también el más cercano. Concretando, a la velocidad de la luz¹¹ sólo se tardaría 1,28 segundos para llegar ahí desde la Tierra. Es por eso que la fuerza de gravedad de la Luna influye también en nuestro planeta, provocando así por ejemplo las mareas.

4.1.1. Características generales

Nuestro satélite tiene unas características bastante diferentes a los de la Tierra, ya que por ejemplo, tiene un tamaño de un cuarto del diámetro de nuestro planeta y 1/81 de su masa. Esto provoca que la fuerza de la gravedad sea una sexta parte que la de la Tierra, por lo que ahí los objetos pesarían seis veces menos y caerían a una velocidad seis veces menor. Además, esto hace que tenga una atmósfera muy frágil, por lo que continuamente caen

⁸ Los TLP (Transient Lunar Phenomena) son resplandores y oscurecimientos en la superficie lunar, causados por pequeñas perturbaciones y lunamotos que liberan gases de su interior.

⁹ El 9 de octubre de 2009, la NASA estalló la Sonda LCROSS (Lunar Crater Observation and Sensing Satellite) y su cohete Centauro en el fondo del cráter Cabeus (un cráter permanentemente sombreado en el polo sur de la Luna). El impacto del cohete, levantó materia (entre ella moléculas de agua).

¹⁰ Satélite más grande de Júpiter y del Sistema Solar

¹¹ Velocidad de la luz (c): 299.792.458 m·s⁻¹ (valor exacto)

meteoritos en su superficie, ya que no existe una capa protectora, lo que le hace tener muchos cráteres y mares.

A continuación presento una tabla con las principales constantes de la Luna y de la Tierra, para que se puedan comparar.

	Luna	Tierra
Masa (kg)	$7,349 \cdot 10^{22}$	$5,974 \cdot 10^{24}$ (81 veces mayor)
Diámetro ecuatorial (km)	3475	12.756 (4 veces mayor)
Densidad media (k g/m³)	3340	5515
Gravedad (m/s²)	1,62	9,81 (6 veces mayor)
Distancia media de la Tierra (km)	384.400 km	--
Temperatura en la superficie (°C)	-150 a 120	15
Período de rotación	27,32 días	23,93 horas
Órbita alrededor de la Tierra	27,32 días	--

Tabla 1: Principales constantes de la Luna y la Tierra

4.1.2. Formación

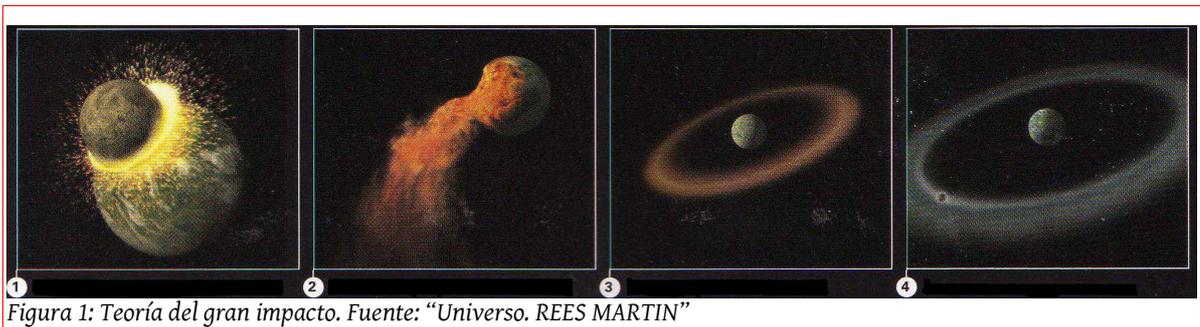
Hay muchas dudas de cómo se formó la Luna, hasta el punto que hay cuatro teorías distintas:

La **teoría de fisión** defiende que la Tierra y la Luna originariamente eran un mismo cuerpo que rotaba mucho más deprisa que actualmente, y que debido a la gran velocidad de rotación, se formó una protuberancia. Más tarde esta fue expulsada por la fuerza centrífuga y se quedó en órbita con la Tierra, formando así la Luna.

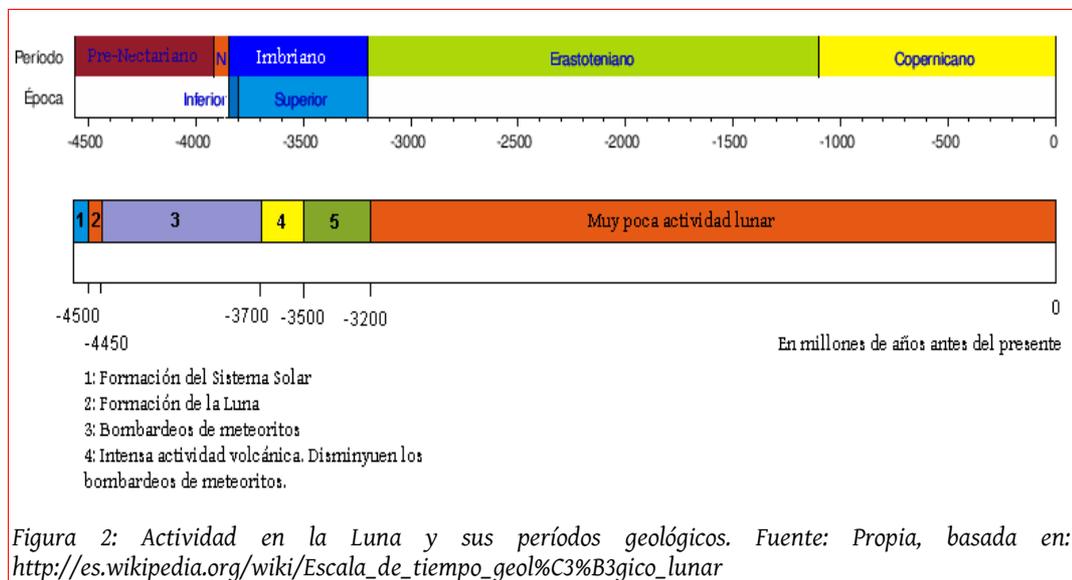
La **teoría de la captura** supone que la Luna era un astro similar a un planeta independiente que se había creado en otro lugar y momento distinto a los de la Tierra. Se cree que la Luna tenía una órbita muy excéntrica alrededor del Sol y que fue alterada por las fuerzas de la gravedad de los planetas, hasta el punto que quedó capturada por la gravedad de la Tierra y fijada en órbita a su alrededor.

La **teoría de acreción binaria** dice que Tierra y Luna fueron creadas juntas, a partir de la misma masa de materia original que estaba alrededor del Sol y en el mismo momento y zona del Sistema Solar.

Finalmente la **teoría del gran impacto** es la más aceptada por los astrónomos actualmente. Se supone que un asteroide del tamaño similar de Marte, llamado Theia, colisionó con la Tierra unos 50 millones de años después de la formación del Sistema Solar, hace 4.500 millones de años¹² (1). El impacto fue tan fuerte que se fundió parte de la roca de la corteza de los dos cuerpos, salpicó al espacio y formó una enorme nube de gas, polvo y roca (2) que encontró una órbita alrededor de la Tierra (3). Con el tiempo, la nube se enfrió rápidamente, y a causa de los impactos entre rocas se formó un único cuerpo, la Luna (4). La siguiente figura es un esquema de esta teoría:



Los relieves lunares se formaron a causa de la actividad de meteoritos u otros, y dependiendo de en qué época se crearon, se distingue cada uno de ellos en distintos períodos geológicos lunares. A continuación vemos un eje cronológico de estos:



¹² Tais W. Dahl y su profesor David J. Stevenson, realizaron una investigación como tesi en geofísica en la Universidad de Copenhagen, para determinar exactamente la edad de la Luna y la Tierra. Lo hicieron utilizando los isótopos de tungsteno, que pueden revelar si los núcleos de hierro y sus superficies de piedra se mezclaron durante la colisión. El resultado fue que Luna y Tierra se crearon hace 4.417 millones de años, 150 millones de años de lo que se había imaginado.

4.1.3. Estructura

Encontramos tres capas diferentes en la estructura interna de la Luna: la corteza, el manto y el núcleo.

La **corteza** es la capa exterior y tiene un grosor de 48 km en la cara visible y de 74 km en la cara oculta, aunque varía mucho dependiendo de las grietas en cada zona. Es sólida y está

formada por *anortosita*, una roca similar al granito y rica en calcio que está compuesta básicamente de *plagioclasa*¹³. También encontramos elementos como oxígeno, silicio, magnesio, hierro, calcio y aluminio.

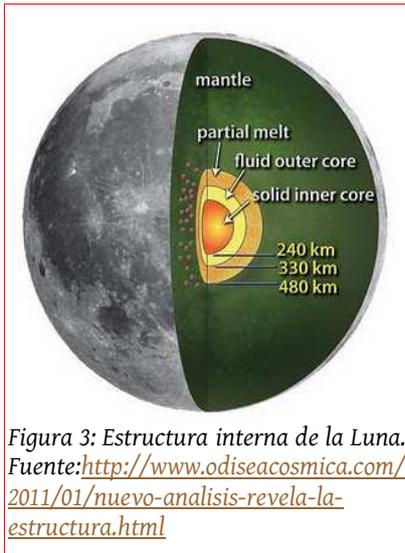


Figura 3: Estructura interna de la Luna.
Fuente:<http://www.odiseacosmica.com/2011/01/nuevo-analisis-revela-la-estructura.html>

El **manto** superior es sólido, rígido y estable. La temperatura aumenta con la profundidad, y a los 1000 km debajo de la corteza la roca se empieza a fundir parcialmente. Esta capa está compuesta básicamente de *olivino*. También hay *ortopiroxeno*, *clinopiroxeno* e *ilmenita*.

Finalmente se cree que hay un **núcleo** pequeño de hierro debido a la alta densidad de la Luna. Se supone que tiene un radio de unos 350 km y que se encuentra parcialmente fundido debido a las altas temperaturas de

unos 1100°C. Aún esto, se necesitan más pruebas para confirmar la existencia de un núcleo metálico.

4.1.4. Atmósfera

La atmósfera de la Luna es muy frágil y fina, de una masa total de unos 10.000 kg y no ejerce totalmente de capa protectora (ya que por ejemplo no impidió los bombardeos de meteoritos). La gravedad de la Luna no es suficientemente potente como para mantener una atmósfera mayor, y por eso su atmósfera se disipa continuamente, sin embargo, el viento solar la repone. Está compuesta básicamente de neón (29%), hidrógeno (22,6%), helio (25,8%), argón (20,6%) y otros.

¹³ La **plagioclasa** (del grupo de los feldspatos) es un conjunto de minerales. Entre ellos predominan los elementos de silicio, aluminio, calcio y oxígeno.

4.1.5. Superficie

La superficie lunar está cubierta de polvo a causa de los meteoritos y de una porosa capa de detritos de diferentes tamaños. El suelo (o regolito¹⁴) es un lecho de roca fina muy fragmentado, y como no hay viento ni lluvia es muy difícil la dispersión de los materiales y su erosión. Hoy en día, cuando miramos nuestro satélite desde la Tierra, podemos ver en su superficie zonas brillantes y algunas manchas oscuras. Esto es debido a que existen diferentes tipos de relieves, creados hace muchos millones de años.

Las zonas brillantes del relieve lunar (ver figura 4) se llaman continentes o *terrae* y es dónde predominan una gran cantidad de **cráteres**. Estos fueron creados por *bombardeos de meteoritos* durante los primeros 750 millones de años de vida de la Luna. Los meteoritos llegaban a grandes velocidades ya que no había una atmósfera que se lo impidiera, agrietando así en gran medida el relieve lunar. Hay muchísimos cráteres, tales como *Tycho* y *Clavius*, que oscilan de los pocos centímetros a los 200 km de diámetro. Los que se ven más brillantes es porque se han creado por impactos más recientes.

Las grandes manchas oscuras de nuestro satélite son denominadas **mares** (del latín *maria*) ya que antiguamente los griegos creían que en estas zonas había agua líquida. Esta creencia perduró hasta el s.XVII. Actualmente sabemos que hace unos 3.500 millones de años, empezó un período de intensa actividad volcánica y disminuyeron los bombardeos de



Figura 4: Luna en cuarto creciente. La zona del terminador está llena de cráteres y relieves, y también se observan los mares *Fecunditatis*, *Tranquillitatis*, *Serenitatis* y *Crisium* entre otros. Fuente:http://www.astrofacil.com/Que_puedo_ver_hoy/10_Octubre/Prismaticos/prismaticos_01.html

asteroides. La lava de los volcanes, se infiltró por las grietas de la corteza hasta unos 100 km de profundidad y relleno los cráteres más profundos. Una vez se solidificó la lava, formó las oscuras zonas basálticas, los mares. Estos pueden tener distintas formas, circular o irregular, y se pueden ramificar en golfos, pantanos o lagos. Ejemplos son el *Mar de la Tranquilidad*¹⁵, el *Mar de la Serenidad* y el *Mar de las Crisis*.

¹⁴ El regolito es la capa de materiales no consolidados, alterados, que está por encima de una capa rocosa, sólida e inalterable. Hace olor a pólvora, y es por eso que en la misión Apolo, a la vuelta, los astronautas creían que se quemaba algo.

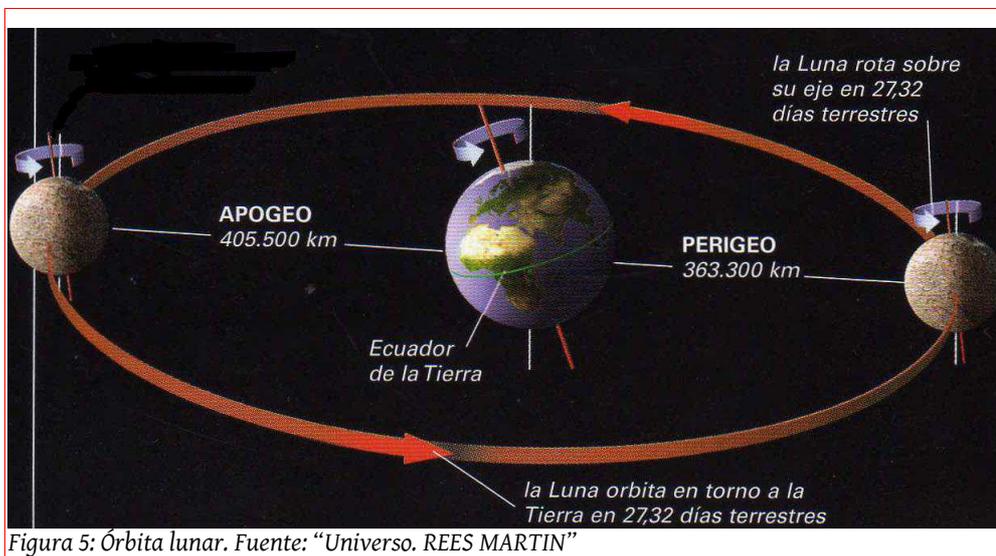
¹⁵ El Apolo XI aterrizó en el Mar de la Tranquilidad.

En el relieve lunar también existen cadenas de **montañas** como los *Alpes* y los *Apeninos* (igual que en la Tierra), y a veces estas montañas rodean los mares. Fueron igualmente creados por impactos de meteoritos. Así, todos éstos relieves son los que observaré con el telescopio, fotografiando cada uno de ellos con exactitud para poderlos identificar y construir el mapa al completo.

Cuando miramos la Luna, vemos que hay una clara división entre la parte iluminada y la no iluminada, la división entre el día y la noche lunares. Esta línea se llama **terminador**. Debido a la luz del sol, en esta parte las sombras se alargan y todos los accidentes geográficos de esta zona se aprecian mucho mejor. Es por eso que muchas de las observaciones que yo voy a hacer con el telescopio serán de esta zona.

4.1.6. Órbita

La órbita de la Luna es la trayectoria que sigue nuestro satélite alrededor de la Tierra. Esta órbita es elíptica y en sentido antihorario, por lo que la distancia entre los dos cuerpos varía. En su punto más alejado (*apogeo*) la Luna está un 10% más lejos que en el punto más cercano (*perigeo*).



La Luna tarda 27,32 días terrestres en completar su órbita alrededor de la Tierra (llamado mes sidéreo), exactamente igual que lo que tarda en rotar sobre su propio eje. A esto se le llama **rotación sincrónica** (sincronización de rotación y traslación). Es por ello que siempre es la misma cara la que está mirando a la Tierra, la cara visible, en contraposición a la zona que no vemos nunca, que se llama cara oculta.



De todas formas esto no es del todo cierto, ya que diversas perturbaciones influyen en la órbita lunar, por ejemplo las **libraciones**, movimientos de oscilación del disco lunar. Por eso, en lugar del 50% teórico que deberíamos ver de la Luna, un observador desde la Tierra puede llegar a ver el 59% de su superficie.

Como que la órbita Tierra-Luna está un poco inclinada respecto al plano de la órbita Tierra-Sol ($5^{\circ}9'$ en promedio), no es fácil que se produzcan eclipses ya que se deben de cortar sus órbitas. En la trayectoria de la Luna hay sólo dos puntos en que los eclipses son posibles, llamados **nodos**.

Sin embargo, a causa de la influencia del Sol y la Tierra en la Luna, su órbita no es una elipse perfecta. Por otra parte, la influencia de la Luna sobre la Tierra es la causa de las **mareas**, que a su vez, provocan que la Luna se aleje de la Tierra aproximadamente 38mm por año. La Luna causa las mareas "deformando" la Tierra a causa de la atracción gravitatoria que ejerce sobre ella, y dicha deformación solo se puede observar en los océanos porque al ser líquido es más fácil de movilizar. Al mismo tiempo las mareas tiran un poco de la Luna, acercándola a la Tierra, y este aumento en su velocidad orbital es la que la aleja de nosotros.



Finalmente es preciso diferenciar entre los períodos lunares. Como hemos dicho el **mes sidéreo** es lo que tarda la Luna en completar una vuelta a la Tierra, siempre considerando el giro respecto al fondo estelar (27,32 días terrestres). Sin embargo el período entre una fase nueva y la siguiente es de 29,53 días terrestres (**mes sinódico**), ya que debemos tener en cuenta el giro de la Tierra respecto al Sol. Esto es debido a que durante cada revolución de la Luna, la Tierra avanza unos 27° respecto su órbita alrededor del Sol.

4.1.7. Fases

Las fases de la Luna dependen de la posición respecto del Sol. La luz del Sol ilumina siempre una mitad de la Luna, y a causa de que la Luna gira sobre su propio eje y en órbita con la Tierra, esta mitad iluminada va cambiando. A veces está iluminada por completo, otras parcialmente y otras en distintas formas, que conocemos como *fases lunares*, el ciclo del cual se completa cada 29,5 días.

Cuando la Luna está entre el Sol y la Tierra, la cara que mira a la Tierra está completamente oscura, es la que llamamos **Luna nueva**. A medida que la Luna se mueve en órbita con la Tierra, la zona que vemos es cada vez mayor, por lo que está en **Luna creciente**, hasta que está completamente iluminada, la **Luna llena**. Después vuelve a disminuir, la llamada **Luna menguante**, y llega otra vez a Luna nueva, habiendo completado un ciclo lunar. Este hecho se entiende muy bien en el siguiente dibujo:

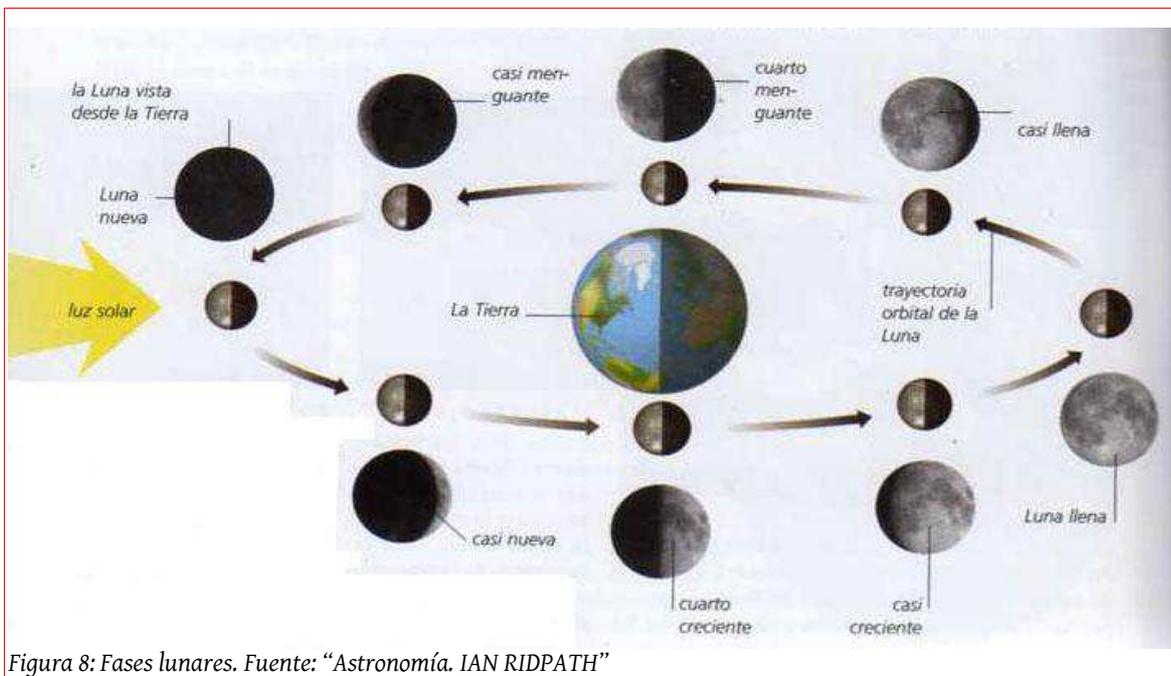


Figura 8: Fases lunares. Fuente: "Astronomía. IAN RIDPATH"

4.2. El telescopio

El telescopio es un instrumento que revolucionó el mundo de la astronomía. Desde que se mejoraron los cristales hacia el siglo XVII, se hicieron grandes aportaciones, empezando por Hans Lippershey¹⁶, quien es reconocido como el creador de los diseños para el primer

¹⁶ Hans Lippershey nació en 1570 en Wesel (Alemania) y murió en 1619. Fue un científico, inventor, óptico y astrónomo.

telescopio práctico. Galileo Galilei¹⁷, a inicios de siglo, fue el primero que lo usó para investigaciones científicas. Así pues, este instrumento nos permite hacer observaciones de cuerpos celestes muy lejanos y apenas visibles a simple vista.

4.2.1. Tipos de telescopios

Los dos tipos de telescopios más populares son los refractores y los reflectores.

Los **telescopios refractores** utilizan lentes para concentrar y enfocar la luz en un punto focal. Existen dos tipos: los **acromáticos** y los **apocromáticos**. Los acromáticos constan de dos lentes en la parte frontal del tubo, pero la luz azul no logra ser enfocada en el mismo punto focal que las otras, causando un fenómeno que se llama *aberración cromática*. Así, para corregir este fenómeno se utilizan los apocromáticos, que enfocan todas las longitudes de onda, y por consiguiente, todos los tipos de luz. Están compuestos por tres lentes en lugar de dos y en una de ellas hay fluorita (un mineral).



Figura 9: Observatorio de Llagostera. Telescopio refractor apocromático de modelo Takahashi Toa 150. Fuente: Propia

¹⁷ Galileo Galilei nació en Pisa (Italia) el 15 de febrero de 1564, y murió en Florencia (Italia), el 8 de enero de 1642. Fue un astrónomo, filósofo, matemático y físico que aportó grandes contribuciones en la revolución científica.

Los **telescopios reflectores** (o Newtonianos¹⁸) combinan espejos en lugar de lentes para concentrar y enfocar la luz y formar las imágenes. Es actualmente el diseño que más se usa ya que soluciona muchos de los problemas citados anteriormente. Aún esto se usa de un modo amateur, los observatorios profesionales utilizan un diseño más complejo.

Yo inicialmente usé un telescopio reflector, pero este captaba mucho las turbulencias atmosféricas, y ello me impedía capturar imágenes de calidad. Por ello, finalmente acabé utilizando un refractor apocromático.

4.2.2. Formación de imágenes en el telescopio

En este caso, aunque empecé utilizando un telescopio reflector Newtoniano, solo voy a explicar el modelo que me sirvió finalmente para las capturas, el telescopio refractor **apocromático**, y la formación de su imagen cuando el objeto está muy lejos (caso de la Luna). Este telescopio está compuesto por tres lentes, una de ellas es la que contiene fluorita para corregir la aberración cromática. Con las otras dos se forma la imagen.

La primera lente, llamada **lente objetiva**, recoge la luz que procede del objeto y produce la imagen real. La otra lente, llamada **ocular**, agranda esta imagen real. La lente objetiva invierte la imagen pero la ocular no, por lo que tendremos una imagen real, menor e invertida. Esto lo podemos observar en la siguiente figura, donde en realidad el esquema es de un refractor acromático. Así pues, en uno de apocromático, se añadiría una lente con fluorita que haría que la luz azul también se enfocase:

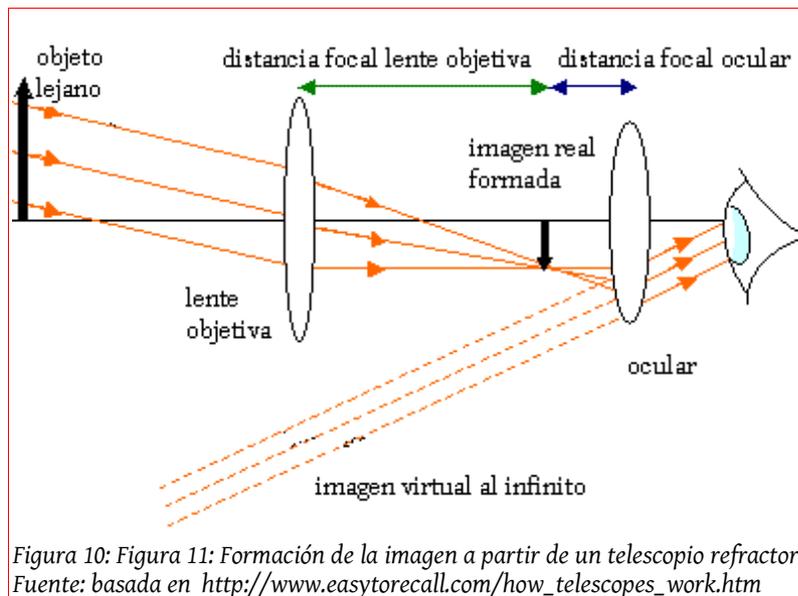


Figura 10: Figura 11: Formación de la imagen a partir de un telescopio refractor. Fuente: basada en http://www.easytorecall.com/how_telescopes_work.htm

¹⁸ El telescopio de reflexión fue inventado por Isaac Newton en el año 1668. Los telescopios Newtonianos son formados por dos espejos y un ocular.

4.3. Tecnología digital

4.3.1. Dispositivo de carga acoplada (CCD)

Un dispositivo de carga acoplada o CCD (en inglés Charge-Coupled Device) es un microchip que se usa para registrar electrónicamente una imagen enfocada sobre su superficie. Es un circuito integrado hecho de silicio (ya que es un material semiconductor) formado por muchos pequeños condensadores (o células fotoeléctricas) juntos, llamados **píxeles**. Así pues, la resolución o detalle de la imagen viene dado por el número de píxeles, cuantos más píxeles haya, más resolución. Lo que hace el CCD es transformar las señales ópticas en señales digitales para manipularlas con el fin de transmitir las, registrarlas o visualizarlas en un monitor. Este proceso es necesario en las observaciones que hice con el telescopio, ya que así veía las imágenes digitales directamente en el ordenador. Por lo tanto, lo que se hace es acoplar un CCD al telescopio.

Para procesar las imágenes, el CCD se basa en el efecto fotoeléctrico (véase apéndice 2). Cada chip tiene una determinada **eficiencia cuántica**, que es la cantidad de fotones que deben incidir sobre el chip para producir corriente eléctrica. Así que a la que inciden los fotones en cada píxel, se emitirán electrones, los cuales son directamente proporcionales al número de fotones. Cuantos más fotones inciden, más electrones se emiten, y más carga se almacena en las llamadas **fuentes de potencial**. Seguidamente la carga recogida en cada píxel se va transfiriendo por las cargas de acoplamiento primero en paralelo (registro paralelo) y luego estas cargas se ubican a lo largo de cada columna (registro serial). Finalmente, los paquetes de carga se convierten en voltaje de salida y luego son codificados digitalmente. Esto se hace ya que en primer lugar se convierte la carga en señal digital en código binario. Además, también se puede almacenar la información de la luz en cada píxel así como su posición en la superficie, y esta información será utilizada para reconstruir la imagen ya que cada píxel ha recogido diferentes intensidades de luz en diferentes partes de la imagen.

Por lo tanto, gracias a este chip podemos pasar la imagen que vemos de la Luna a través del telescopio directamente al ordenador, y así es posible manipular las imágenes como queramos.



Figura 11: CCD.
Fuente:<http://www.digitalfotore.com/imagendigital/sensorccd.htm>

5. Obtención y tratamiento de las imágenes

5.1. Obtención

Tal como ya se ha citado, para obtener las imágenes he utilizado un telescopio modelo *Takahashi Toa 150* que me ha proporcionado la Agrupación Astronómica de Girona en Llagostera. También utilicé una camera CCD *QHY9¹⁹*, y la adapté al telescopio para poder ver directamente las imágenes en el ordenador, lo que además me permitió observar la Luna a mucho más aumento. Esta técnica se denomina “CCD visual”, porqué observamos la Luna directamente en el ordenador, y no con el ocular. A continuación, gracias al programa **Maxim DL Pro Version 5** (el cual utiliza el sistema de un dispositivo de carga acoplada) registré las imágenes que llegaban de partes muy concretas de la Luna. Seguidamente explicaré el funcionamiento de este programa:

En primer lugar debemos configurar las opciones del programa, básicamente el filtro que le ponemos. En nuestro caso, en la Luna creciente pusimos un filtro de hidrógeno alfa (Ha) ya que este corta mucho la luz y nos deja ver el objeto más oscurecido por lo que se pueden apreciar más los relieves. En la Luna menguante escogimos el filtro de oxígeno III (OIII) porqué consideramos que se veían mejor los relieves con este, que deja pasar un poco más de luz.

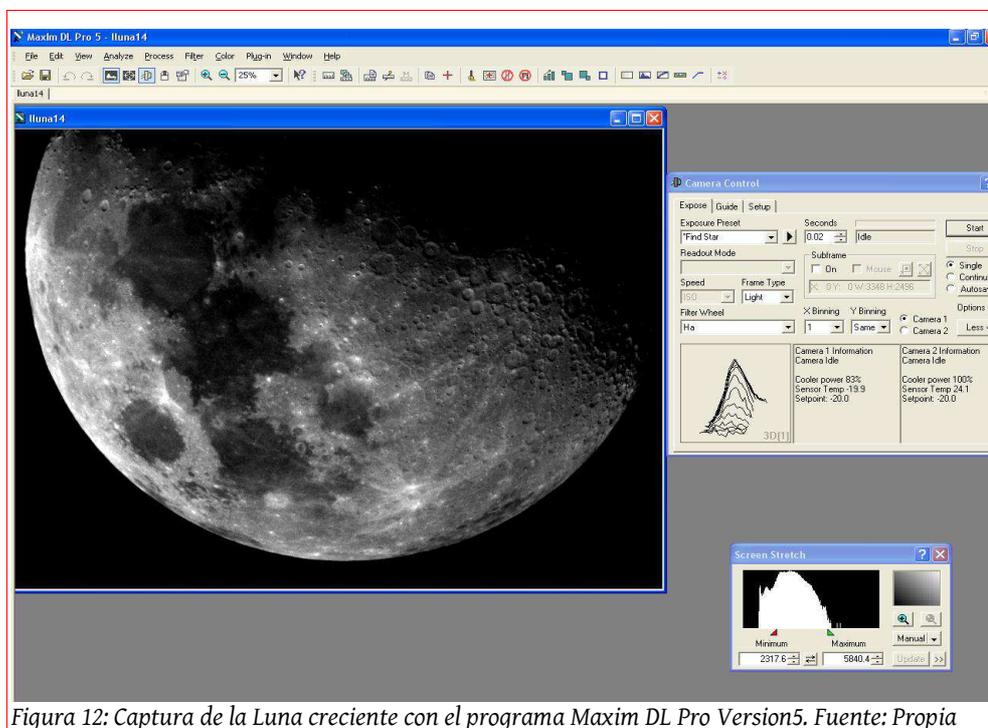


Figura 12: Captura de la Luna creciente con el programa Maxim DL Pro Version5. Fuente: Propia

19 De resolución de cada píxel= 5,4 micrómetros

Una vez tenemos la Luna situada en nuestro ocular, debemos de mover la imagen con el mando que lleva acoplado el telescopio, y así, poder escoger cuando queremos que se tome la fotografía. Una vez hemos guardadas varias fotografías, podemos ampliar la imagen a su 100%, ya que la que vemos en la figura 12 está solo al 25%. Es por eso que una vez más grande, los relieves se ven con mucha claridad, sobretodo los que están cerca del terminador.

Así, la imagen que vemos en la captura de pantalla del programa, es de la Luna creciente, y es la siguiente:



Figura 13: Luna creciente, día 24/09/12 de 21.30h a 22.30h. Fuente: Propia

5.2. Tratamiento

Una vez tenemos la mejor imagen (que escogemos nosotros) captada por el programa anterior, necesitamos tratarla y retocarla para que se vea de mayor calidad y nitidez. Esto lo haremos con la ayuda del programa **Photoshop**, básicamente con las opciones de brillo y contraste. Además giramos la imagen para que se vea como la vemos desde la Tierra, y no invertida que es como nos la da el telescopio. El resultado es el siguiente:

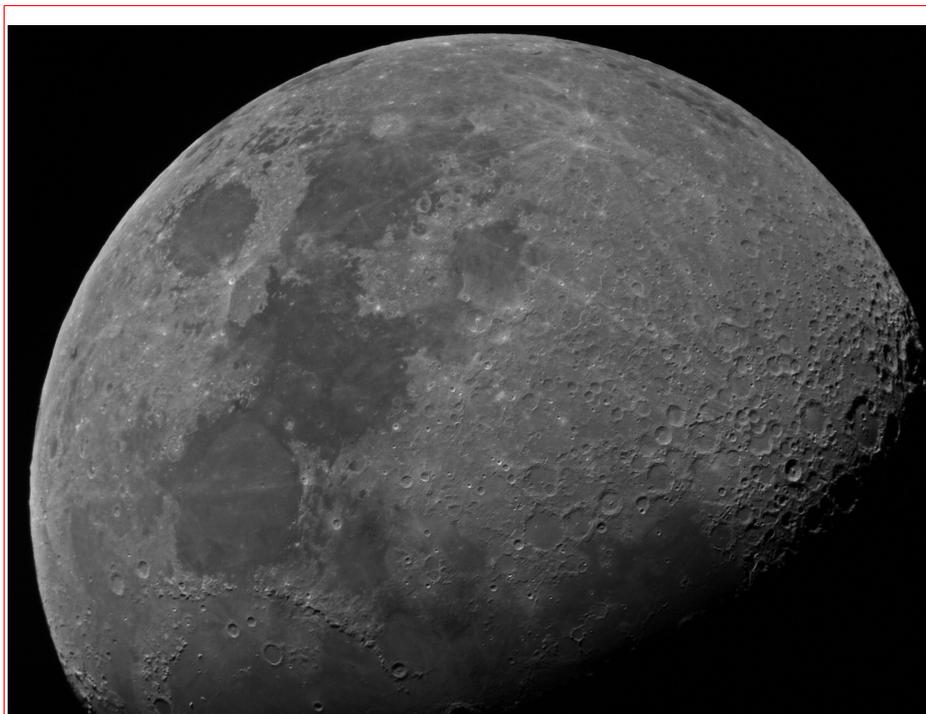


Figura 14: Luna creciente, día 24/09/12 de 21.30h a 22.30h. Fuente: Propia

Y la fotografía final de Luna menguante (tratada de la misma forma) es:

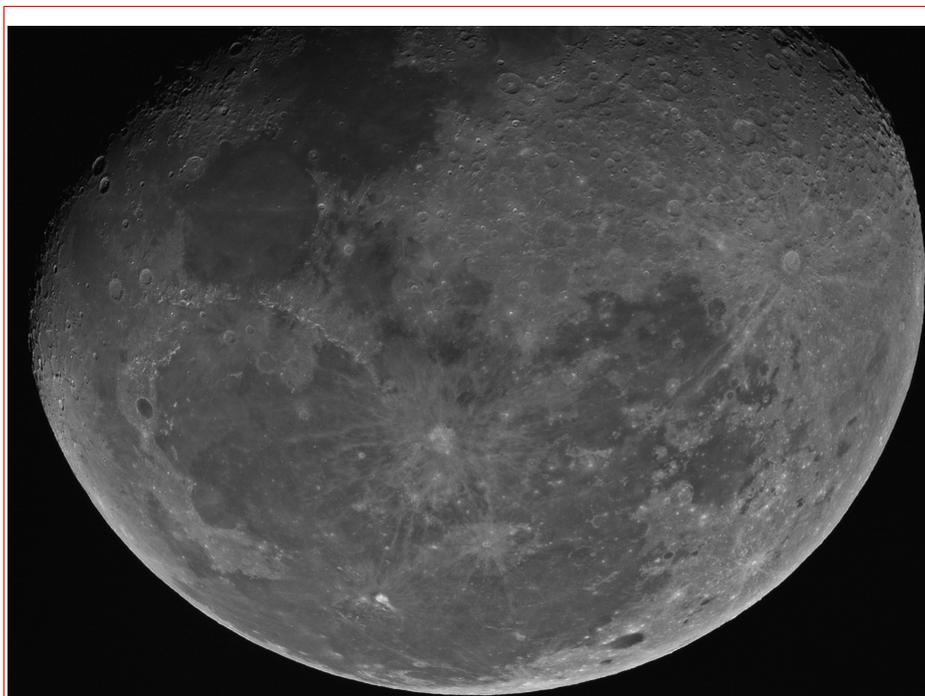


Figura 15: Figura 15: Luna menguante, día 3/10/12 de 22.30 a 23.30. Fuente: Propia

Como vemos en la figura 15, la Luna está todavía en tránsito hacia el cuarto menguante, ya que se observa más de la mitad de esta. Hay bastantes relieves repetidos en las dos imágenes, y este hecho de que no sea exactamente Luna menguante nos comportará más error en los cálculos de las alturas.

A continuación, ampliando las imágenes al 100% debemos identificar cada relieve. Esta identificación la llevé a cabo principalmente con la ayuda del programa **Virtual Moon Atlas** y de algunas otras páginas web o libros.

Además de cada uno de estos relieves recogí del *Virtual Moon Atlas* la siguiente información: tipo de relieve (cráter, planicie, valle, mar, montaña, fisura...), tamaño, altura, período geológico en que se formó, descripción básica, posición y origen del nombre.

6. Elaboración de una página web

Para crear la página web con el mapa virtual de la Luna, la Agrupación Astronómica de Girona ha reservado un apartado para mi mapa virtual lunar en su página web, donde se accederá a través de un enlace. Este enlace al mapa será pues: <http://www.astrogirona.com/projectes/2012/mapalluna>.

Además, tengo que identificar los relieves para que una vez en la página web, pasando el ratón por encima se pueda abrir una ventana nueva con la información del relieve. Para esto, es necesaria la función de *Image Ready* del *Photoshop*.

En primer lugar tengo que dividir las dos fotografías que saldrán en la web (la de la Luna creciente y la Luna menguante) en ocho partes iguales, ya que así en cada parte de la fotografía se abrirá otra ventana con la imagen ampliada. A continuación, abriendo cada parte con el *Photoshop* y con la opción de *Image Ready*, se deben identificar los relieves poniendo cada uno de ellos en el siguiente enlace (que es el que se va a abrir al hacer click en ellos): <http://www.astrogirona.com/projectes/2012/mapalluna/text/xxxx.html> donde xxxx es el nombre del relieve.

Como vemos en la siguiente captura de pantalla, al seleccionar con la opción de *Image Ready* encima de un cráter en concreto, podemos poner el enlace al que va destinado así como con su nombre. Esto debemos hacerlo para todos los relieves que queramos identificar. En la ventana que se nos abre, debemos llenar todos los campos. Estos son:

- Tipo: imagen
- nombre: xxxx (nombre del relieve).
- URL²⁰: enlace en el que queremos que aparezca la información del cráter.
- destino: _blank (para que se abra una ventana nueva al seleccionar el relieve).
- alt: xxxx (es lo que queremos que salga al pasar el ratón por encima del relieve. Ponemos el nombre de este y sus dimensiones entre paréntesis).

²⁰ URL: Uniform Resource Locator (Localizador de recursos uniforme).

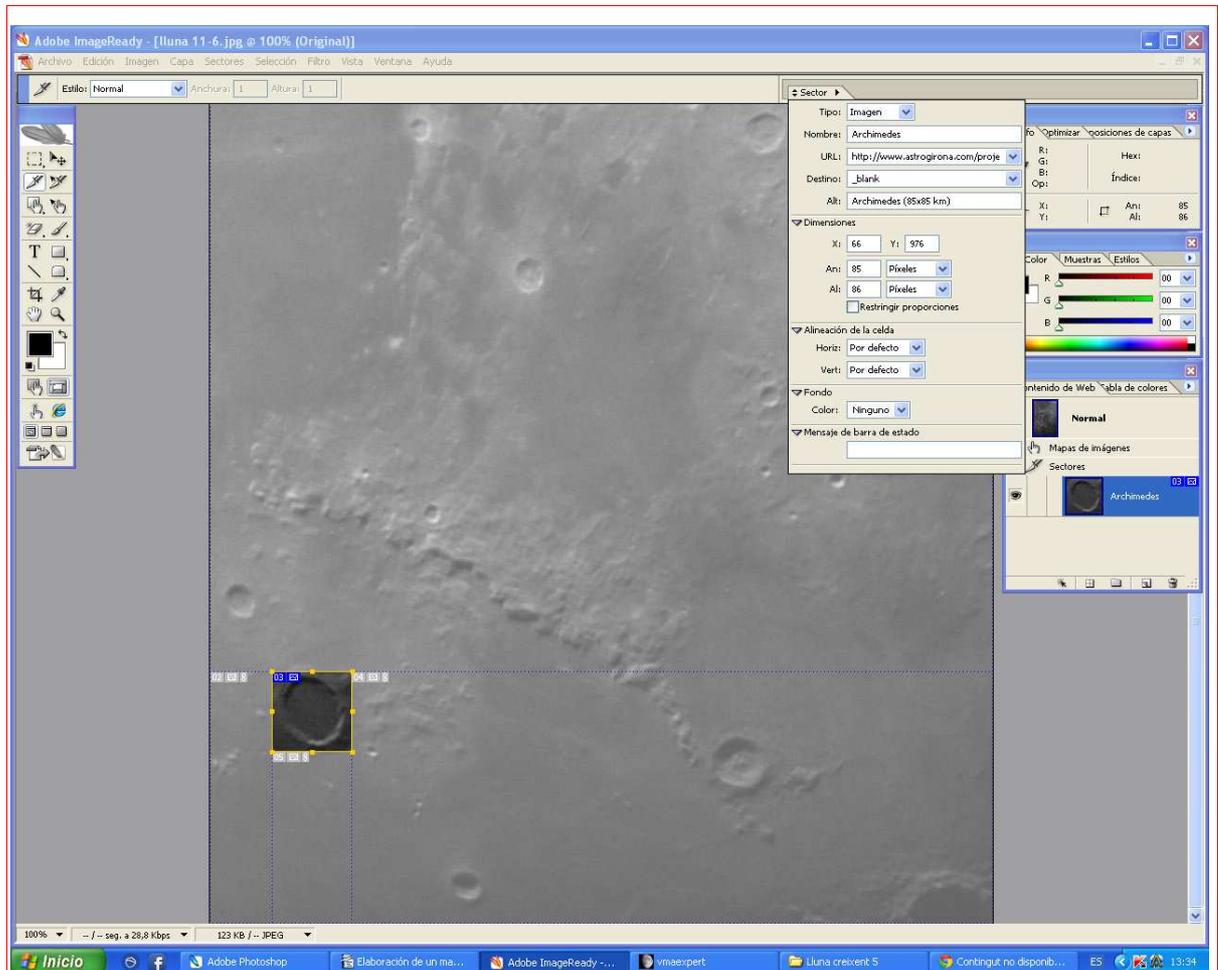


Figura 16: Captura de pantalla en ImageReady para hacer un link en la imagen

Fuente: Propia

En el apéndice 3 podemos encontrar las dieciséis partes de la Luna (ocho de la Luna menguante y ocho de la Luna creciente), que he utilizado en mi página web.

Seguidamente, necesitamos que todos los archivos de la información de los relieves estén con el mismo nombre que el relieve en el enlace, y así, guardando cada archivo en forma de página web, al hacer click en cada enlace saldrá la información pertinente.

Con el programa de *Adobe Dreamweaver*, debemos editar la página web, a nivel estético. Es decir, el formato de letra, los colores, etc.

Finalmente, es necesario poner toda la información de la página web en un servidor, para que así cualquier persona en cualquier momento pueda ver el mapa lunar. Los servidores son llamados *FTP*²¹, y son un protocolo de red para la transferencia de archivos entre sistemas conectados a una red. Así, es necesario un cliente de un programa de FTP para subir la información de la página web al servidor. Con el programa WS_FTP, los miembros de la Agrupación Astronómica me dejaron alojar mi página web en su servidor.

Así, ya tenemos la página montada. En la página web de la Agrupación²², habrá un enlace (configurado a partir del *Adobe Dreamweaver*), que vaya directamente a mi mapa lunar virtual. En este, constará una introducción y explicación del proyecto, así como las dos fotografías de la Luna. Cada una de ellas, dividida en ocho partes, podrá ser ampliada, y en estas zonas se podrá acceder a la información de todos los relieves identificados.

²¹ **FTP: File Transfer Protocol (Protocolo de Transferencia de Archivos)**

²² www.astrogirona.com

7. Mediciones

7.1. *Altura de los relieves: dos métodos posibles*

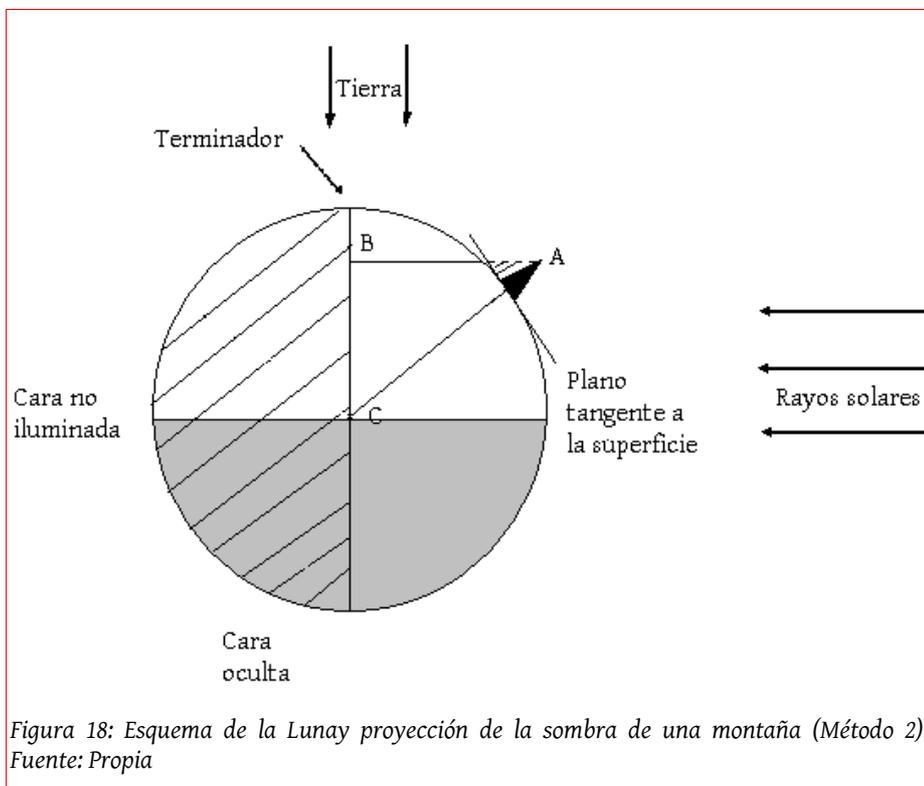
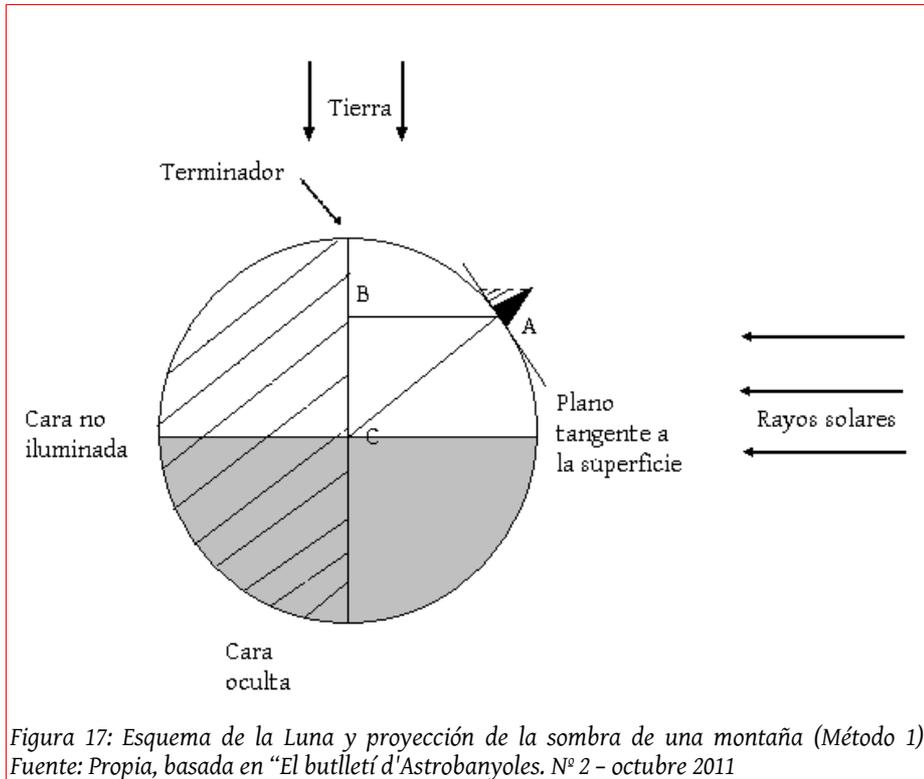
Para calcular la altura de los cráteres, vamos a usar la sombra que hacen en las fotografías que obtuve a partir de las observaciones en Luna creciente o Luna menguante.

Hay dos formas de hacer los cálculos, pero ambas tienen la misma base. Aún esto, estas formas no son del todo precisas ya que no tenemos en cuenta distintos factores citados en las conclusiones.

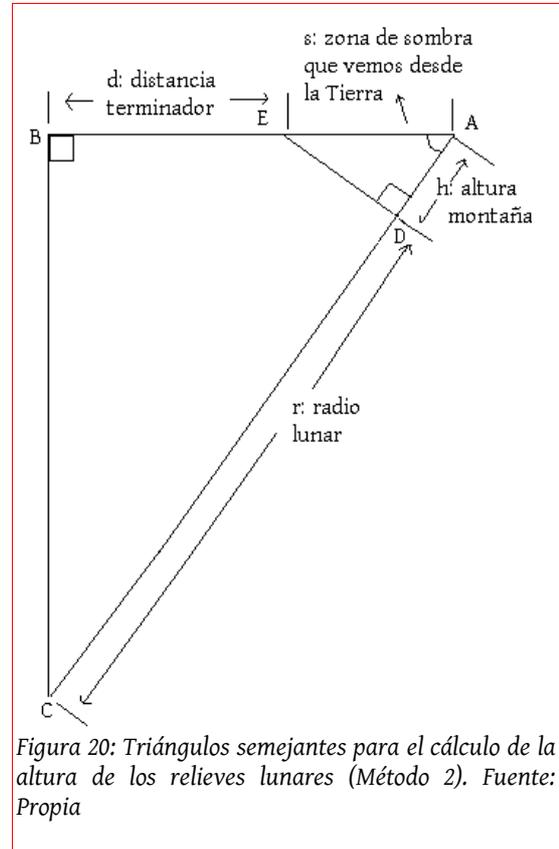
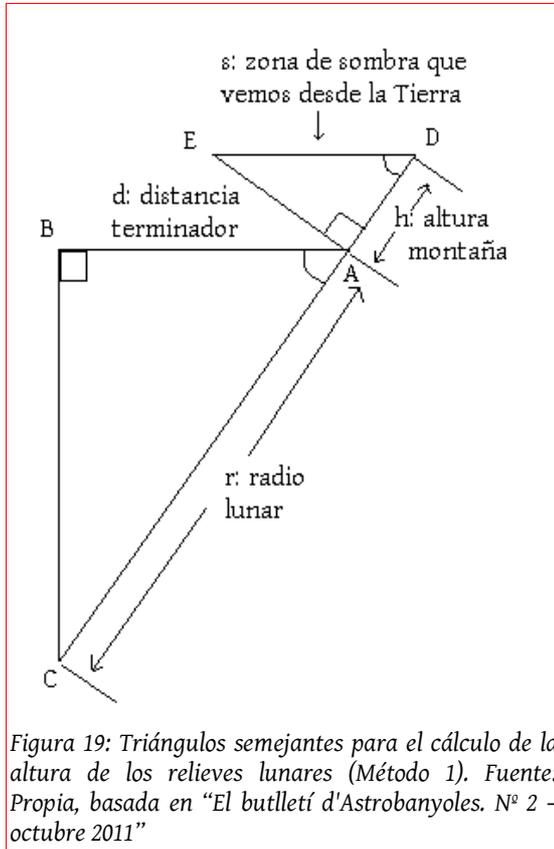
Las dos siguientes figuras representan la Luna en cuarto creciente o cuarto menguante, donde los rayos solares vienen de la derecha, y la Tierra está posicionada en un ángulo de 90° respecto a la Luna. Entonces la cara oculta es la que está pintada en gris, y la cara no iluminada la que se encuentra rayada (el terminador es la línea que separa la noche lunar del día lunar). Trazando un plano tangente a la Luna en el punto de la montaña, vemos que la sombra real de la montaña sería lo que está sobre el plano tangente. Pero la zona oscura (lo que nosotros llamamos sombra) que observamos desde la Tierra es toda la zona rayada, así que es ésta (que va en la misma dirección que los rayos del Sol) la que vemos en las fotografías y a partir de la cual haremos los cálculos. Esta sombra iría desde la cima de la montaña hasta el punto sobre la superficie de la Luna (en la tangente) donde termina la sombra.

El punto A es pues el pie de la montaña. El segmento AB en la figura 17 (método 1) es la distancia desde la base de la montaña hasta el terminador, en cambio en la figura 18 (método 2) es la distancia desde el inicio de la sombra hasta el terminador. AC, en el primer caso es el radio lunar, mientras que en el segundo sería el radio lunar más la altura de la montaña.

Por lo tanto, tenemos el triángulo ABC en los dos esquemas, de lados AB y AC conocidos.



Representando ahora los dos triángulos de cada esquema encontramos que son los siguientes:



Así pues, encontraríamos dos fórmulas distintas.

Centrándonos en primer lugar en el **método 1**, los dos triángulos ABC y ADE son semejantes, porque tienen los tres ángulos iguales. Ambos tienen un ángulo recto, y el ángulo BAC y EDA también son iguales, ya que una misma recta es cortada por dos paralelas (por esto el tercer ángulo también es el mismo). De aquí, podemos extraer la fórmula de los triángulos semejantes, por lo que:

$$\frac{DA}{ED} = \frac{BA}{CA}$$

$$DA = \frac{ED \cdot BA}{CA}$$

De esta forma, sabemos el valor de nuestra incógnita, h:

$$h = \frac{sd}{r}$$

Calculando ahora la fórmula para el **método 2**, vemos también que hay dos triángulos en este dibujo, uno es ABC y el otro ADE. Los dos son semejantes, porque tienen los tres ángulos iguales. En primer lugar los dos ángulos rectos, (ABC y EDA) y el ángulo CAB o DAE, que es común entre los dos triángulos, por lo que el tercer ángulo también debe ser el mismo. De aquí, podemos extraer la fórmula de los triángulos semejantes, por lo que:

$$\frac{DA}{EA} = \frac{BA}{CA}$$
$$DA = \frac{EA \cdot BA}{CA}$$
$$h = \frac{s(d+s)}{r+h}$$

Así, despejando nuestra incógnita, h, encontramos que (dejamos ya solo la opción positiva y no \pm porque la altura debe ser positiva):

$$h(r+h) = s(d+s)$$
$$hr + h^2 = sd + s^2$$
$$h^2 + hr - (sd + s^2) = 0$$

$$h = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)}}{2}$$

Por esto, al tener dos formulas y las dos correctas, el ejemplo del cráter Tycho será tratado mediante los dos métodos, y explicado, haciendo todos los cálculos. El cálculo de los otros cráteres los efectuaré mediante los dos métodos, pero con la ayuda de una hoja de cálculo de Excel.

A partir de aquí, vamos a proseguir todos los cálculos de las incertidumbres con ambas fórmulas.

7.2. Radio lunar aparente

Para poder aplicar la fórmula anterior, tenemos que conocer s, d y r, por lo que primeramente debemos calcular el **factor de escala, f**, de la fotografía. Para hacerlo, debemos saber cuanto mide el radio en la fotografía (r_{aparente}), y dividiendo el radio real (r_{real}), que es un dato conocido, por el aparente, podremos saber este factor de escala.

Para calcular este radio aparente, he partido de las fotografías de la Luna y he buscado su centro. A partir de esto, en el Photoshop hay una opción de medir el tamaño de la imagen,

así que seleccionando el radio lunar en la fotografía, he obtenido que el radio aparente lunar es de 56,80cm, con una incertidumbre de 2,00cm, a causa de que hay el error humano al buscar donde está el centro y al seleccionar el radio.

Así pues, el radio aparente es:

$$r_{\text{aparente}} = (56,80 \pm 2,00) \text{ cm}$$

7.3. Factor de escala, f

A partir de estos datos, no calcularemos ni el factor de escala ni la sombra real ni la distancia real al terminador por separado, sino que iremos sustituyendo los valores encontrados anteriormente (si hace falta serán fracciones y así no nos dejaremos decimales por el camino) para ser más precisos, y no tener que calcular datos numéricamente antes de la altura.

A continuación, cogiendo como dato conocido el radio (r_{real}) de la Luna (1737,5km)²³, debemos dividir el radio real de la Luna por el de la fotografía, obteniendo así a cuantos km equivale un cm. El cálculo es el siguiente:

$$f = \frac{r_{\text{real}}}{r_{\text{aparente}}} = \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}$$

Seguidamente tenemos que calcular la incertidumbre de este factor de escala. Aunque consideramos que el radio real no tiene incertidumbre el radio aparente sí que tiene. Así pues:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= \frac{\Delta(r_{\text{real}})}{r_{\text{real}}} + \frac{\Delta(r_{\text{aparente}})}{r_{\text{aparente}}} \\ \Delta f &= f \frac{\Delta(r_{\text{aparente}})}{r_{\text{aparente}}} \\ \Delta f &= \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \cdot \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} = \frac{3475 \text{ km} \cdot \text{cm}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:
$$f = \left(\frac{1737,5}{56,80} \pm \frac{3475}{56,80^2} \right) \text{ km} \cdot \text{cm}^{-1}$$

²³ Considerada sin incertidumbre y extraída del programa *Celestia*.

7.4. Sombra y distancia al terminator aparentes

Seguidamente tengo que calcular la sombra que hacen los relieves y su distancia al terminator en la fotografía. Para esto, utilizaré la distancia que me da Photoshop, ya que así yo solo debo seleccionar de dónde a dónde se debe medir, y habrá mucha menos incertidumbre que haciéndolo con una regla.

Cogiendo la sombra de un cráter cualquiera, antes que todo debemos empezar ampliando mucho la imagen del cráter, seleccionándolo y recortándolo en el Photoshop:

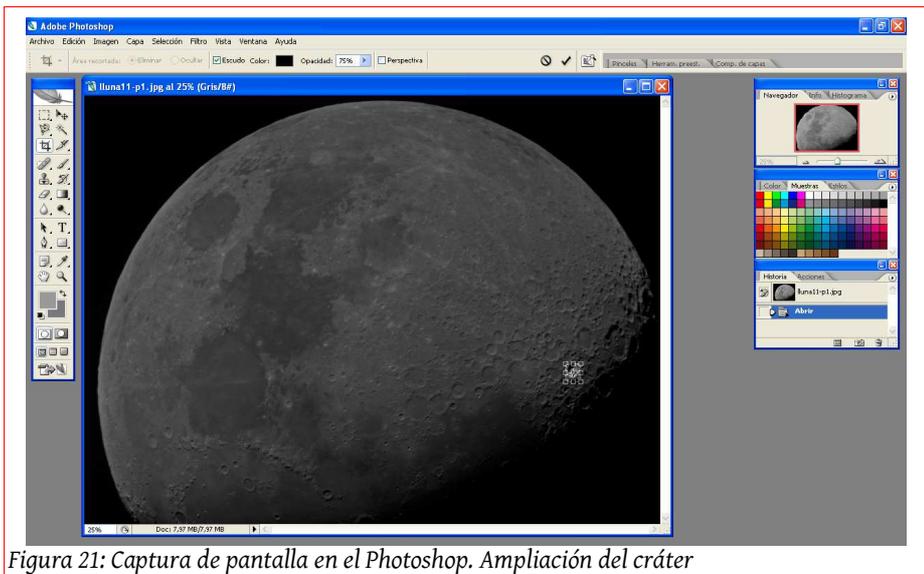


Figura 21: Captura de pantalla en el Photoshop. Ampliación del cráter

A continuación, una vez tenemos la sombra muy ampliada, seleccionamos el rectángulo que queremos que el Photoshop nos mida, teniendo en cuenta que la longitud de la sombra que queremos calcular será la hipotenusa del rectángulo, y que ésta debe ir en la misma dirección que los rayos del sol:

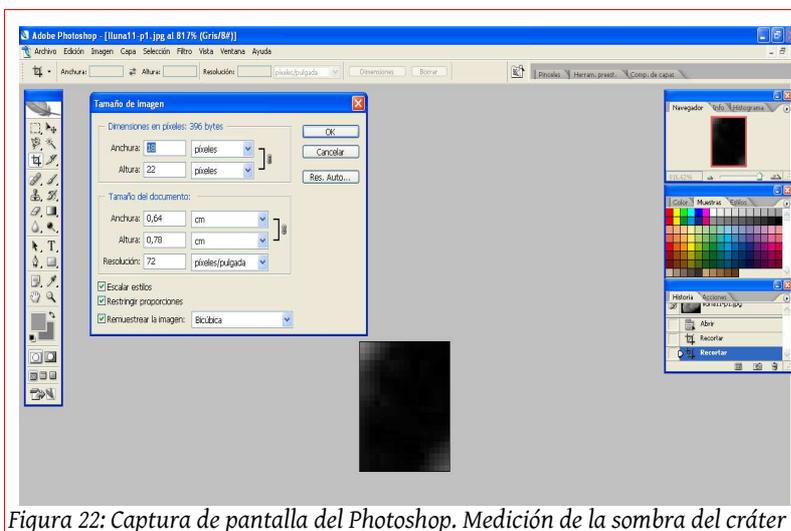


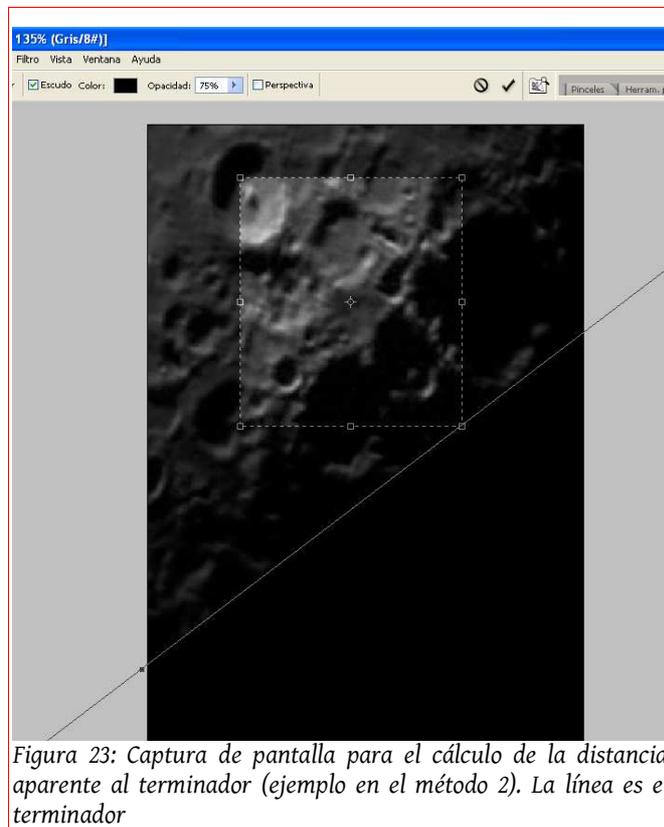
Figura 22: Captura de pantalla del Photoshop. Medición de la sombra del cráter

Así pues, tenemos un rectángulo del que conocemos sus lados. Para calcular la diagonal solo tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras:

Y si s_x =anchura del rectángulo, y s_y =altura del rectángulo:

$$s_{aparente} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

Repetimos el mismo proceso para calcular la distancia aparente hasta el terminador, hasta donde ya no se vea ningún relieve, y en la misma dirección que los rayos solares. Debemos tener en cuenta que en el método 1 debemos medir la distancia desde la base del cráter hasta el terminador y en el método 2 desde el final de la sombra. Por eso, debemos proceder de la siguiente forma:



Y si d_x =anchura del rectángulo, y d_y =altura del rectángulo:

$$d_{aparente} = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$$

Sus incertidumbres variarán en cada caso porqué la anchura y altura del rectángulo no serán las mismas. Por esto, contado que la incertidumbre de cada anchura y altura es de $\pm 0,05 \text{ cm}$, tenemos que las incertidumbres de la sombra y la distancia aparentes son:

$$\frac{\Delta s_{\text{aparente}}}{s_{\text{aparente}}} = \frac{\Delta \sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} = \frac{\Delta (s_x^2 + s_y^2)^{\frac{1}{2}}}{(s_x^2 + s_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta (s_x^2 + s_y^2)}{s_x^2 + s_y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta s_x^2 + \Delta s_y^2}{s_x^2 + s_y^2}$$

Y calculando por separado la Δs_x^2 que es lo mismo que Δs_y^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s_x^2}{s_x^2} &= 2 \frac{\Delta s_x}{s_x} \\ \Delta s_x^2 &= 2s_x^2 \frac{\Delta s_x}{s_x} \\ \Delta s_x^2 &= 2s_x \Delta s_x \end{aligned}$$

Y volviéndolo a juntar:

$$\Delta s_{\text{aparente}} = s_{\text{aparente}} \cdot \frac{2s_x \Delta s_x + 2s_y \Delta s_y}{2(s_x^2 + s_y^2)} = s_{\text{aparente}} \cdot \frac{s_x \cdot 0,05 + s_y \cdot 0,05}{s_x^2 + s_y^2} = s_{\text{aparente}} \cdot \frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2}$$

Sustituyendo ahora la sombra aparente:

$$\Delta s_{\text{aparente}} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} = \frac{0,05(s_x + s_y)}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

Y lo mismo con la incertidumbre de la distancia al terminador:

$$\Delta d_{\text{aparente}} = d_{\text{aparente}} \cdot \frac{0,05(d_x + d_y)}{d_x^2 + d_y^2}$$

Así, la sombra y distancia aparentes son:

$$s_{\text{aparente}} = \left(\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \pm \frac{0,05(s_x + s_y)}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \right) \text{cm}$$

$$d_{\text{aparente}} = \left(\sqrt{d_x^2 + d_y^2} \pm \frac{0,05(d_x + d_y)}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2}} \right) \text{cm}$$

7.5. Sombra y distancia al terminator reales

Así pues, para saber s_{real} y d_{real} solo vamos a necesitar multiplicar las distancias aparentes por el factor de escala:

$$s_{real} = s_{aparente} \cdot f \qquad d_{real} = d_{aparente} \cdot f$$

$$s_{real} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \qquad d_{real} = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}$$

Y sus incertidumbres (haciéndolo en el caso de la sombra) valdrán:

$$\frac{\Delta(s_{real})}{s_{real}} = \frac{\Delta(s_{aparente})}{s_{aparente}} + \frac{\Delta f}{f}$$

Pudiendo substituir la incertidumbre de la sombra aparente por la que hemos encontrado antes:

$$\Delta(s_{real}) = s_{real} \left[\frac{s_{aparente} \cdot \frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2}}{s_{aparente}} + \frac{\Delta f}{f} \right] = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{\frac{3475 \text{ km} \cdot \text{cm}}{56,80^2 \text{ cm}^2}}{\frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}} \right]$$

$$\Delta(s_{real}) = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]$$

Y lo mismo para la distancia al terminator:

$$\Delta(d_{real}) = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(d_x + d_y)}{d_x^2 + d_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]$$

Así, la sombra y distancia reales son:

$$s_{real} = \left(\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \pm \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right] \right) \text{ km}$$

$$d_{real} = \left(\sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \pm \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(d_x + d_y)}{d_x^2 + d_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right] \right) \text{ km}$$

7.6. Incertidumbre de los relieves en los dos métodos

A partir de aquí, en lugar de poner por ejemplo s_{real} , escribimos directamente s , suponiendo que ésta ya es el dato real.

MÉTODO 1: La formula para calcular la altura de los relieves hemos encontrado que era:

$$h = \frac{sd}{r}$$

Así pues, partiendo de esta fórmula, sustituimos todos los valores anteriormente encontrados en ella:

$$h = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}}{1737,5 \text{ km}}$$

$$h = \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2}$$

Finalmente debemos calcular la incertidumbre de la altura. Como que no consideramos incertidumbre en el radio, la incertidumbre de la altura será la siguiente:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta r}{r}$$

$$\Delta h = h \left[\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta d}{d} \right]$$

Y sustituyendo con los valores anteriormente encontrados de ambas incertidumbres:

$$\Delta h = h \left[\frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(s_x + s_y)}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right] + \frac{\sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(d_x + d_y)}{d_x^2 + d_y^2} + \frac{2,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]}{\frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}}}} \right]$$

Y sustituyendo el valor que encontramos anteriormente de la altura:

$$\Delta h = \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \left[0,05 \left(\frac{s_x + s_y}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{d_x + d_y}{d_x^2 + d_y^2} \right) + \frac{4,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]$$

Con ello, obtendríamos que la altura de la montaña es:

$$h = \left(\frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \pm \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \left[0,05 \left(\frac{s_x + s_y}{s_x^2 + s_y^2} + \frac{d_x + d_y}{d_x^2 + d_y^2} \right) + \frac{4,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right] \right) \text{ km}$$

MÉTODO 2: En este caso, la fórmula es la siguiente (ya cogiendo sólo la opción positiva porque la altura debe de ser mayor que cero):

$$h = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)}}{2}$$

Y ahora sustituimos s y d por las fórmulas anteriormente encontradas y r por el radio:

$$h = \frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \left[\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} + \left(\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \right)^2 \right]}}{2}$$

$$h = \frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \left[\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} + (s_x^2 + s_y^2) \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} \right]}}{2}$$

$$h = \frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} \cdot \left[\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2} + s_x^2 + s_y^2 \right]}}{2}$$

Para finalizar, tenemos que calcular la incertidumbre de esta altura, partiendo de la fórmula que hemos encontrado en la que no sustituimos los valores de s, d y r. La fórmula de la incertidumbre de la altura (Δh) sería:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta(-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)})}{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)}} + \frac{\Delta z}{z}$$

Como que es bastante largo, lo dividiré en varias partes:

- Incertidumbre del numerador de la fracción:

$$\Delta[-r + (r^2 + 4(sd + s^2))^{\frac{1}{2}}] = \cancel{\Delta r} + \Delta[(r^2 + 4(sd + s^2))^{\frac{1}{2}}]$$

Donde Δr es 0. Nos quedamos con la segunda parte:

$$\Delta[(r^2 + 4(sd + s^2))^{\frac{1}{2}}] = \cancel{\Delta r^2} + \Delta[(4(sd + s^2))^{\frac{1}{2}}]$$

En este caso también se nos anula Δr^2 , y nos volvemos a quedar así con la otra parte:.

$$\Delta[(4(sd+s^2))^{\frac{1}{2}}] = 4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\frac{4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}]}{4(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(sd+s^2)}{4(sd+s^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(sd+s^2)}{(sd+s^2)}$$

- Nos centramos con el numerador otra vez: $\Delta(sd+s^2) = \Delta sd + \Delta s^2$

- Incertidumbre de la sombra por la distancia al terminador:

$$\frac{\Delta sd}{sd} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta d}{d}$$

$$\Delta sd = sd \left[\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta d}{d} \right] = \frac{sd\Delta s}{s} + \frac{sd\Delta d}{d} = d\Delta s + s\Delta d$$

$$\frac{\Delta s^2}{s^2} = 2 \frac{\Delta s}{s}$$

- Incertidumbre de la sombra al cuadrado: $\Delta s^2 = 2s^2 \frac{\Delta s}{s}$

$$\Delta s^2 = 2s\Delta s$$

Ahora que ya tenemos todas las incertidumbres separadamente, debemos ponerlas todas juntas en la fórmula inicial, lo que también vamos a hacer por pasos (a la inversa que antes):

$$\frac{4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}]}{4(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(sd+s^2)}{(sd+s^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd+s^2)}$$

$$4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}] = 4(sd+s^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd+s^2)} \right]$$

$$4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}] = 2(sd+s^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd+s^2)} \right]$$

Y dividiendo la fracción de $\frac{(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}}{sd+s^2} = \frac{1}{(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}}$:

$$4\Delta[(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}] = 2 \left[\frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd+s^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

- Así que la fórmula global para la incertidumbre es:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{[2(\frac{d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s}{(sd + s^2)^{\frac{1}{2}}})]}{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)}} \rightarrow \Delta h = h \cdot \frac{2(d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s)}{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)} \cdot \sqrt{(sd + s^2)}}$$

A continuación tendríamos que sustituir los valores anteriormente encontrados de ambas incertidumbres y de la altura en la fracción, por lo que así no nos haría falta encontrar estos valores numéricamente. Pero esta fórmula sería demasiado larga, así que he decidido que es mejor calcular primero s, d, h, y sus incertidumbres a partir de las otras fórmulas, y con estos valores, calcular la incertidumbre de la altura. Este método se encuentra calculado con el ejemplo del Tycho, que aunque por el método 1 no nos haga falta calcular las variables, en el método 2 sí.

Finalmente, encontramos pues que la altura es la siguiente:

$$h = \left(\frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} \cdot [\sqrt{s_x^2 + s_y^2} \cdot \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + s_x^2 + s_y^2}]}{2} \pm h \cdot \frac{2(d\Delta s + s\Delta d + 2s\Delta s)}{-r + \sqrt{r^2 + 4(sd + s^2)} \cdot \sqrt{(sd + s^2)}} \right) \text{ km}$$

7.7. Ejemplo del cráter Tycho

Seguidamente vamos a calcular la altura del cráter Tycho con los dos métodos, y para todos los demás cráteres, utilizaré una hoja de cálculo (Excel).

Método 1: En este caso, solo necesito los datos que calculo con el Photoshop de la medida de la sombra y de la distancia al terminador, ya que antes he encontrado la fórmula general de la altura con estas dos solas incógnitas. Son los siguientes:

$$\begin{array}{l} s_x = 0,60 \text{ cm} \quad d_x = 6,31 \text{ cm} \\ s_y = 0,71 \text{ cm} \quad y \quad d_y = 7,27 \text{ cm} \end{array}$$

A partir de estos datos, aplicamos la fórmula de la altura que hemos encontrado:

$$h = \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \sqrt{6,31^2 \text{ cm}^2 + 7,27^2 \text{ cm}^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} = 4,8 \text{ km} = 4800 \text{ m}$$

Y su incertidumbre:

$$\Delta h = \frac{1737,5 \text{ km} \cdot \sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \sqrt{6,31^2 \text{ cm}^2 + 7,27^2 \text{ cm}^2}}{56,80^2 \text{ cm}^2} \left[0,05 \left(\frac{0,60 \text{ cm} + 0,71 \text{ cm}}{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} + \frac{6,31 \text{ cm} + 7,27 \text{ cm}}{6,31^2 \text{ cm}^2 + 7,27^2 \text{ cm}^2} \right) + \frac{4,00 \text{ cm}}{56,80 \text{ cm}} \right]$$

$$\Delta h = \pm 0,74 \text{ km} = \pm 740 \text{ m}$$

Por lo que encontramos que la altura es: $h = (4800 \pm 740) \text{ m}$

Con una incertidumbre relativa (I_r) de: $I_r = \frac{\Delta h}{h} \cdot 100 = \frac{740}{4800} \cdot 100 = 15 \%$

Método 2: Seguidamente haremos el mismo cálculo utilizando el segundo método. En este caso debemos calcular primero la sombra y distancia al terminador y sus incertidumbres a partir de las fórmulas que encontré. Debemos tener en cuenta que ahora las componentes s_x y s_y no varían, pero sí la distancia al terminador (ya que debemos medir desde el final de la sombra y no desde el pie del cráter). Estas son:

$$\begin{array}{l} s_x = 0,60 \text{ cm} \quad d_x = 5,93 \text{ cm} \\ s_y = 0,71 \text{ cm} \quad y \quad d_y = 7,02 \text{ cm} \end{array}$$

En primer lugar hacemos el cálculo de la altura, que es lo que buscamos principalmente:

$$h = \frac{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4 \cdot \frac{1737,5^2 \text{ km}^2}{56,80^2 \text{ cm}^2} \cdot [\sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \sqrt{5,93^2 \text{ cm}^2 + 7,02^2 \text{ cm}^2} + 0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2]}}{2} = 5,1 \text{ km} = 5100 \text{ m}$$

Y ahora para calcular la incertidumbre, necesitamos también la sombra y la distancia al terminator y sus incertidumbres respectivas:

$$s_{\text{real}} = \sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} = 28 \text{ km}$$

$$\Delta s_{\text{real}} = \sqrt{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(0,60 \text{ cm} + 0,71 \text{ cm})}{0,60^2 \text{ cm}^2 + 0,71^2 \text{ cm}^2} + \frac{2,00 \text{ km}}{56,80 \text{ km}} \right] = \pm 3 \text{ km}$$

$$d_{\text{real}} = \sqrt{5,93^2 \text{ cm}^2 + 7,02^2 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} = 281 \text{ km}$$

$$\Delta d_{\text{real}} = \sqrt{5,93^2 \text{ cm}^2 + 7,02^2 \text{ cm}^2} \cdot \frac{1737,5 \text{ km}}{56,80 \text{ cm}} \left[\frac{0,05(5,93 \text{ cm} + 7,02 \text{ cm})}{5,93^2 \text{ cm}^2 + 7,02^2 \text{ cm}^2} + \frac{2,00 \text{ km}}{56,80 \text{ km}} \right] = \pm 12 \text{ km}$$

Así pues, la incertidumbre de la altura es la siguiente:

$$\Delta h = 5,1 \text{ km} \cdot \frac{2(281 \text{ km} \cdot 3 \text{ km} + 28 \text{ km} \cdot 12 \text{ km} + 2 \cdot 28 \text{ km} \cdot 3 \text{ km})}{-1737,5 \text{ km} + \sqrt{1737,5^2 \text{ km}^2 + 4(28 \text{ km} \cdot 281 \text{ km} + 28^2 \text{ km}^2)} \cdot \sqrt{(28 \text{ km} \cdot 281 \text{ km} + 28^2 \text{ km}^2)}} = \pm 0,09 \text{ km} = \pm 90 \text{ m}$$

Por lo tanto la altura es: $h = (5100 \pm 90) \text{ m}$

Con una incertidumbre relativa (I_r) de: $I_r = \frac{\Delta h}{h} \cdot 100 = \frac{90}{5100} \cdot 100 = 2 \%$

En realidad, la altura del cráter Tycho es de 4800m²⁴, por lo que en el método 1 nos sale exacto, aunque haya más incertidumbre en ello. Los dos resultados son:

Método 1: $h = (4800 \pm 740) m$

Método 2: $h = (5100 \pm 90) m$

Altura real: $h_{real} = 4800m$

Por lo tanto, los errores relativos (E_r) respecto al valor real de la altura son:

Método 1: $E_r = \frac{|h_{real} - h|}{h_{real}} \cdot 100 = \frac{|4800 - 4800|}{4800} \cdot 100 = 0 \%$

Método 2: $E_r = \frac{|h_{real} - h|}{h_{real}} \cdot 100 = \frac{|4800 - 5100|}{4800} \cdot 100 = 6 \%$

Como vemos, el primer método parece ser más exacto que el segundo, ya que hay menos error relativo respecto al valor real. Sin embargo, en cuanto a la precisión, es más preciso el segundo método porque nos sale una incertidumbre relativa muy pequeña respecto del valor encontrado (solo del 2%), mientras que en el primero nos sale del 15%.

Pensando en los métodos empleados, valoramos que la incertidumbre debe ser bastante grande ya que hay muchas causas de error en la práctica (citados todos en las conclusiones), por lo que en principio creo que es bastante irreal que nos salga solo una del 2% en el segundo método.

Así, todas las demás alturas las he calculado con una hoja de cálculo, insertando las fórmulas pertinentes. Finalmente he querido probarlo con los dos métodos, para poder comparar los resultados y ver cuál de los dos métodos nos sale mejor. Seguidamente constan las dos tablas de resultados, donde los cráteres del 1 al 10 están en la imagen de Luna creciente, y los del 11 al 20 están en la de Luna menguante (ver su situación en el apéndice 4):

²⁴ Todos las alturas de los cráteres son extraídos del programa del Virtual Moon Atlas.

	S_x ($\pm 0,05\text{cm}$)	S_y ($\pm 0,05\text{cm}$)	d_x ($\pm 0,05\text{cm}$)	d_y ($\pm 0,05\text{cm}$)	h (m)	Δh (m)	I_r (%)	h_{real} (m)	E_r (%)
1. Herschel	0,25	0,28	12,28	14,83	3900	1000	26	3770	3
2. Alpetragius	0,27	0,32	11,24	12,49	3800	920	24	3900	3
3. Thebit	0,21	0,25	10,88	12,98	3000	860	29	3270	8
4. Werner	0,23	0,28	14,32	18,17	4500	1200	27	4220	7
5. Hell	0,21	0,25	7,57	9,43	2100	620	30	2200	5
6. Ball	0,32	0,37	7,46	9,28	3100	690	22	2800	11
7. Tycho	0,60	0,71	6,31	7,27	4800	740	15	4800	0
8. Porter	0,56	0,71	4,63	5,29	3400	540	16	2800	21
9. Gruemberger	0,88	1,06	4,20	4,69	4700	620	13	4300	9
10. Moretus	0,71	0,88	5,12	6,24	4900	690	14	5000	2
11. Hercules	0,53	0,60	3,39	3,63	2100	370	18	3200	34
12. Atlas	0,99	1,13	1,80	2,01	2200	310	14	3000	27
13. Burg	0,28	0,32	6,42	6,88	2200	530	24	2200	0
14. Grove	0,28	0,32	5,40	5,82	1800	450	25	2370	24
15. Daniell	0,23	0,27	6,70	7,16	1900	520	27	2070	8
16. Luther	0,21	0,25	8,26	9,70	2200	650	30	1900	16
17. Romer	0,39	0,42	6,14	7,44	3000	600	20	3400	12
18. Macrobius	0,85	1,06	2,72	3,00	3000	410	14	3700	19
19. Hill	0,25	0,28	4,76	5,61	1500	400	27	3340	55
20. Carmichael	0,28	0,35	5,36	6,00	1900	460	24	3640	48

Tabla 2: Cálculo de la altura de los cráteres según el método 1

	S_x ($\pm 0,05\text{cm}$)	S_y ($\pm 0,05\text{cm}$)	S_{real} (km)	ΔS_{real} (km)	d_x ($\pm 0,05\text{cm}$)	d_y ($\pm 0,05\text{cm}$)	d_{real} (km)	Δd_{real} (km)	h (m)	Δh (m)	I_r (%)	h_{real} (m)	E_r (%)
1. Herschel	0,25	0,28	12	3	12,28	14,83	589	23	4000	104	3	3770	6
2. Alpetragius	0,27	0,32	13	3	11,24	12,49	514	20	3900	92	2	3900	0
3. Thebit	0,21	0,25	10	3	10,88	12,98	518	20	3000	74	2	3270	8
4. Werner	0,23	0,28	11	3	14,32	18,17	708	27	4600	127	3	4220	9
5. Hell	0,21	0,25	10	3	7,57	9,43	370	15	2200	47	2	2200	0
6. Ball	0,32	0,37	15	3	7,46	9,28	364	15	3300	66	2	2800	18
7. Tycho	0,60	0,71	28	3	6,31	7,27	295	13	5300	95	2	4800	10
8. Porter	0,56	0,71	28	3	4,63	5,29	215	10	3900	61	2	2800	39
9. Gruemberger	0,88	1,06	42	4	4,20	4,69	193	9	5700	91	2	4300	33
10. Moretus	0,71	0,88	35	3	5,12	6,24	247	11	5600	95	2	5000	12
11. Hercules	0,53	0,60	25	3	3,39	3,63	152	8	2500	35	1	3200	22
12. Atlas	0,99	1,13	46	4	1,80	2,01	83	5	3400	46	1	3000	13
13. Burg	0,28	0,32	13	3	6,42	6,88	288	12	2200	40	2	2200	0
14. Grove	0,28	0,32	13	3	5,40	5,82	243	11	1900	32	2	2370	20
15. Daniell	0,23	0,27	11	3	6,70	7,16	300	13	1900	36	2	2070	8
16. Luther	0,21	0,25	10	3	8,26	9,70	390	16	2300	50	2	1900	21
17. Romer	0,39	0,42	18	3	6,14	7,44	295	13	3100	56	2	3400	9
18. Macrobius	0,85	1,06	42	4	2,72	3,00	124	7	3900	55	1	3700	5
19. Hill	0,25	0,28	12	3	4,76	5,61	225	10	1600	27	2	3340	52
20. Carmichael	0,28	0,35	14	3	5,36	6,00	246	11	2000	34	2	3640	45

Tabla 3: Cálculo de la altura de los cráteres según el método 2

8. Conclusiones

Hacer este trabajo me ha aportado muchas cosas, y además, he cumplido todos mis objetivos. Me he introducido en el mundo de la astronomía, aprendiendo a utilizar un telescopio y a capturar y tratar las imágenes. También he aprendido a utilizar programas adecuados para tratar estas imágenes y construir el mapa virtual lunar. Pero, lo más importante es quizás haber aprendido a identificar los relieves lunares, crear enlaces en cada fotografía de la Luna y configurar el mapa lunar editando la página web; y por otra parte también son para mi de gran importancia los cálculos, con los que he disfrutado mucho y he podido resolver mi hipótesis de si es posible medir las alturas de los cráteres a partir de una fotografía, obteniendo unos resultados bastante reales y descubriendo algunas limitaciones que hubiera podido mejorar en el estudio.

Durante el desarrollo del trabajo me he encontrado con diversas dificultades. Esto es debido a que para hacer las observaciones, son necesarias unas determinadas condiciones, ya sean meteorológicas, de la Luna, o de la disponibilidad del telescopio. Así pues, para conseguir buenas imágenes tenía que obtenerlas en fase de Luna creciente o menguante, que es cuando no hay demasiada luz pero sí la suficiente para visualizar mejor los relieves. Además, debido a que planificamos las observaciones lunares durante el verano, muchos días había turbulencias atmosféricas (debidas al enfriamiento de la superficie terrestre por la noche, la cual se calienta mucho durante el día en esta época el año), por lo que no era posible obtener imágenes suficientemente nítidas. Para resolver éste problema decidí cambiar el sistema previsto para capturar y procesar las imágenes. Con ello, finalmente obtuve imágenes de buena calidad que me han servido perfectamente tanto por los cálculos como para la elaboración del mapa virtual lunar.

Centrándonos en el mapa virtual, me he familiarizado mucho con la superficie de la Luna y todos sus relieves. Es una tarea bastante mecánica pero muy interesante y he descubierto que la mayoría de los relieves de la Luna llevan nombres de importantes científicos. También me ha sido posible imaginar mucho mejor como es nuestro satélite, y ha sido muy interesante el hecho de saber como se formaron todos sus relieves. Además, he aprendido a utilizar el Photoshop y el Image Ready, y he creado una página web.

Pensando ahora en como mejorar el mapa lunar, quizás hubiera podido capturar también una imagen de Luna llena, ya que permitiría tener una idea más global del satélite (aunque los relieves se hubieran visto peor porque habría demasiada luz). Otra mejora a

señalar sería hacer las observaciones en invierno en lugar de verano, ya que en invierno hay menos turbulencia atmosférica (porque no hace tanto calor), y esto me permitiría poder utilizar el telescopio reflector Takahashi Mewlon 210 (que es el que primeramente pensábamos utilizar). Con él podríamos capturar vídeos (transportables a imágenes), con muchos más aumentos, y como consecuencia también veríamos más nítidos los relieves.

Sin embargo, estoy muy satisfecha del resultado, puesto que esta página web que incluye el mapa virtual lunar, puede ser de utilidad para personas que sientan curiosidad o quieran profundizar en cómo es la Luna.

Centrándonos en los cálculos, escogí la medición de las alturas de los cráteres para relacionar las dos fases del trabajo: la obtención de imágenes reales de la superficie lunar y el cálculo de sus relieves, pero ahora sé que las posibilidades de cálculo de otras mediciones son numerosas. Algunos ejemplos son los siguientes: diámetro de la Luna a partir de una foto de un eclipse (si hubiera habido un eclipse este verano, hubiera sido muy interesante) o con una cámara oscura; distancia de la Tierra a la Luna a partir de una fotografía de un eclipse o a partir de dos fotografías hechas en dos lugares distintos del mundo (ángulo paralaje); movimiento de rotación lunar a partir de dos fotografías hechas con algunas horas de diferencia; movimiento de traslación lunar a partir de dos fotografías hechas con algunos días de diferencia; y diámetro de un cráter o mar, aplicando simplemente el factor de escala conocido, o midiendo lo que tarda al pasar la Luna por el ángulo de visión del telescopio.

Así pues, después de escoger como objetivo calcular la altura de los cráteres, me he encontrado con algunas limitaciones, sobretodo en las observaciones, ya que no pude obtener fotografías de mayor aumento (en las que las mediciones pudieran ser más precisas) o en las que se viese el terminador completo. A pesar de estas limitaciones, he podido hacer los cálculos con bastante exactitud, aunque puede haber también algunas causas de error.

En primer lugar, hay muchas variables que no he tenido en cuenta al hacer los cálculos, y que seguramente influyen en el resultado final. Por ejemplo, el ángulo de visión Tierra-Luna-Sol debe influir bastante, ya que este varía según la fase de la Luna en la que se tome la imagen. Si tomamos la imagen justo en cuarto creciente o menguante, el cálculo será mucho más preciso, ya que el ángulo de visión será de 90° (ver apéndice 6 para su explicación). Por eso, en la fotografía que presento en fase de Luna creciente, dado que está prácticamente en cuarto creciente, nos salen los resultados más exactos (una media del 7% de error relativo en el método 1, y del 14% en el método 2). Pero en la fotografía en fase de Luna menguante, no tuvimos en cuenta este aspecto (ya que no pensábamos que esto iba a influir tanto), y el día que tomamos la imagen faltaban aún 3 días para el cuarto

menguante (con lo cual el ángulo de visión era inferior a 90°). Por lo tanto, al no tener en cuenta este ángulo, nos han salido resultados con más error (una media del 24% de error relativo en el método 1, y del 20% en el método 2).

Otro factor que también puede influir en el resultado es la distancia Tierra-Luna, ya que ésta es variable y ello hace variar ligeramente el ángulo de observación. También creo que este ángulo de observación puede ir variando (aunque muy poco) a medida que va transcurriendo la noche.

Otra causa de error es el hecho de no tener en cuenta en los cálculos la curvatura de la Luna. Así, dependiendo si un cráter está en el centro de la Luna o a un lado (según nuestro ángulo de visión) veremos una sombra distinta.

También creo que la situación del cráter en la Luna es clave. Cuanto más cerca esté el cráter del terminador, más grande veremos su sombra, y por lo tanto, habrá menos margen de error, ya que nos será más fácil medirla con precisión. Por esto he seleccionado cráteres bastante cercanos al terminador (y que a parte se ven mejor definidos).

Finalmente, existe el error humano al hacer el cálculo, ya que al tener que seleccionar manualmente en el Photoshop la sombra y la distancia al terminador, señalar un píxel más o un píxel menos puede modificar el resultado. Además, debía seleccionar siempre un rectángulo para que su diagonal fuera la que queríamos medir, teniendo en cuenta que siguiera la dirección de los rayos solares, cosa que hice con la máxima precisión posible.

Así pues, para minimizar el efecto en los resultados de los factores citados, se deberían tener en cuenta todas estas variables. En primer lugar, el ángulo de visión Tierra-Luna-Sol (ver apéndice 6), y también la curvatura de la Luna (ver apéndice 5). Estos dos factores creo que son los más influyentes en el resultado. También podría haber realizado diversas mediciones de la sombra y distancia con el Photoshop, y así, hubiera obtenido un resultado más exacto. Y también creo que hubiera sido necesaria una fotografía con el terminador completo, para poder trazarlo a lo largo de toda la imagen.

Analizando ahora las tablas de los resultados, vemos que en el método 2 nos sale una incertidumbre relativa respecto al valor encontrado muy pequeña (de 1 al 3%), cosa que encuentro un poco irreal después de todas las causas de error nombradas. Además, vemos que hay mucha diferencia entre ambas incertidumbres relativas en los dos métodos (en el primero del 13 al 30%). En relación a los resultados encontrados, generalmente en la imagen de Luna creciente son bastante exactos (excepto en los cráteres Porter y

Gruemberger en el método 2). En cambio en la imagen de Luna menguante, se incrementan los errores relativos hasta un 55% (excepto en el cráter Burg y el Macrobius, Daniell y Romer en el método 2). Esto es debido a que el ángulo de visión en la Luna menguante era inferior a 90° , y por lo tanto, al no tenerlo en cuenta, nos salen valores más pequeños que la altura real.

Para finalizar, quiero expresar mi satisfacción por el trabajo realizado y por haber escogido este tema, ya que aunque hubiera podido tener en cuenta los factores detallados para mejorar los resultados, me ha servido para constatar la dificultad de llevar a cabo con rigor los estudios científicos, que la metodología empleada es muy importante y que es prácticamente imposible tener en cuenta todos los factores condicionantes. Siempre habrá obstáculos que compliquen el desarrollo del estudio, pero aprender a superarlos es también otro objetivo muy importante y que aporta mucho conocimiento.

Así pues, con mi trabajo, creo que he aprendido lo que comporta desarrollar un estudio o una investigación, y además he obtenido una visión muy general, pero muy real, de la tarea de aquellas personas que se dedican al estudio de estos temas, la astronomía y la astrofísica: al estudio del Universo.

9. Bibliografía

9.1. Páginas web

TAKAHASHI, Toa-150 Triplet Ortho Apochromat: <http://www.takahashi-europe.com/en/TOA-150.php> [consulta de 27 de agosto de 2012]

ASTROCITY, Cursos de Astronomía y Astrotienda. CCD QHY9 Monocroma astrofotografía cielo profundo: <http://www.astrocity.es/ccds-qhy-camaras-astrofotografia-/551-ccd-qhy9-monocroma-astrofotografia-cielo-profundo.html> [consulta de 27 de agosto de 2012]

MAIN, IAN. Física mazuerista. Lentes convergentes y divergentes: <http://fisicamazuera.wordpress.com/fisica-mazuerista/lentes-convergentes-y-divergentes/> [consulta de 12 de agosto de 2012]

MALLIK, U. y SOMANTRI, LIFIANA. *Many faces of light: As Newton saw it, with some magic tricks*: <http://www.physics.uiowa.edu/~umallik/adventure/geo-optics/lightnw.htm> [consulta de 12 de agosto de 2012]

ASOCIACIÓN ASTRONÓMICA CIELO DEL GUARDIA, *El telescopio reflector*: http://www.cielodeguadaira.org/index.php?option=com_content&task=view&id=50&Itemid=26 [consulta de 16 de agosto de 2012]

SÁNCHEZ, GUSTAVO. Captando el cosmos, Blog de astronomía y astrofotografía. *El telescopio refractor*: <http://captandoelcosmos.wordpress.com/2012/03/26/el-telescopio-refractor/> [consulta de 16 de agosto de 2012]

ESPEJOS Y LENTES: <http://premium.enciclonet.com/flash/espejos.swf> [consulta de 16 de agosto de 2012]

BEARDSMORE, MARILYN. Easytorecall uk web direction. *A simple explanation of how telescopes work*: http://www.easytorecall.com/how_telescopes_work.htm [consulta de 16 de agosto de 2012]

WIKIPEDIA, La enciclopedia libre. *Charge-Coupled device*: http://es.wikipedia.org/wiki/Charge-coupled_device [consulta de 16 de agosto de 2012]

CNN EXPANSIÓN. *Existe agua en la Luna: Nasa*: <http://www.cnnexpansion.com/actualidad/2009/11/13/existe-agua-en-la-luna-nasa> [consulta de 25 de agosto de 2012]

WIKIPEDIA, La enciclopedia libre. Luna: <http://es.wikipedia.org/wiki/Luna> [consulta de 25 de agosto de 2012]

PARRA, JOSÉ LUIS. El firmamento. *La Luna: estructura interna*: <http://elfirmamento.wordpress.com/2008/12/17/la-luna-estructura-interna/> [consulta de 25 de agosto de 2012]

DEL RAMO, ANTONIO y GUILLÉN, FRANCISCO. Región de Murcia Digital. *Los minerales: plagioclasa*: http://www.regmurcia.com/servlet/s.SI?sit=c,365,m,108&r=ReP-26865-DETALLE_REPORTAJESABUELO [consulta de 25 de agosto de 2012]

VIERU, TUDOR. Softpedia. *El manto de la Luna es similar al de la Tierra*: <http://news.softpedia.es/EL-manto-de-la-Luna-es-similar-al-de-la-Tierra-146243.html> [consulta de 25 de agosto de 2012]

EL MUNDO CIENCIA. *El núcleo de la Luna es similar al de nuestro planeta*: <http://www.elmundo.es/elmundo/2011/01/07/ciencia/1294397487.html> [consulta de 25 de agosto de 2012]

ASTROMIA. *El origen de la Luna*: <http://www.astromia.com/tierraluna/origenluna.htm> [consulta de 25 de agosto de 2012]

PROYECTO CELESTIA. *La formación de la Luna*: <http://celestia.albacete.org/celestia/celestia/tierra/3forma.htm> [consulta de 25 de agosto de 2012]

BALAGUER ROSA, RAFAEL. Tel·lúrium, Ciència Transversal. *La data de la creació*: <http://www.telurium.net/?q=content/la-data-de-la-creaci%C3%B3> [consulta de 26 de agosto de 2012]

ASTROMIA. *Las fases de la Luna*: <http://www.astromia.com/tierraluna/fasesluna.htm> [consulta de 27 de agosto de 2012]

YAHOO. *¿Es cierto que la Luna se alejará de la Tierra con el tiempo?*: <http://mx.answers.yahoo.com/question/index?qid=20100525103656AACekpt> [consulta de 29 de agosto de 2012]

WINDOWS TO THE UNIVERSE: http://www.windows2universe.org/the_universe/uts/moon1.html&lang=sp [consulta de 29 de agosto de 2012]

ASTEROMIA. *La órbita de la Luna*: <http://asteromia.net/luna/la-luna-orbita.html> [consulta de 29 de agosto de 2012]

THE FULL MOON ATLAS, The lunar navigator. *Interactive maps of the moon*:
<http://www.lunasociety.org/atlas/index.shtml> [consulta de 18 de setiembre de 2012]

PANORÁMICA DE LA LUNA. *Gran foto de la Luna con sus cráteres y mares más importantes, ideal para iniciados con telescopios*:
http://www.portalplanetasedna.com.ar/panoramica_luna.htm [consulta de 18 de setiembre de 2012]

LÓPEZ SÁNCHEZ, ÁNGEL R. *Prácticas de Física del Cosmos*, Universidad de la Laguna.
Práctica 6: la ortografía de la Luna:
<http://trcortes.webs.ull.es/Megatecla/imagenes/practicas/prfc62005.pdf> [consulta de 18 de octubre de 2012]

9.2. Descargas

DIFFRACTION LIMITED. *Maxim DL Pro Version 5*:
http://www.cyanogen.com/maxim_main.php [consulta de 15 de setiembre de 2012]

VIRTUAL MOON ATLAS: <http://virtual-moon-atlas.uptodown.com/descargar> [consultas frecuentes]

9.3. Libros y revistas

RIDPATH, IAN. *Astronomía*. 1a ed., Madrid: Espasa, 2007

BAKER, JOANNE. *50 cosas que hay que saber sobre el Universo*. 1a ed., Barcelona: Ariel, 2011

CERDÀ, XIMO. *El llibre de l'astronomia*. 1a ed., Barcelona: Editorial Barcanova, 2011

KIRK, TIM. *Physics. IB study guides*. 2a ed., Oxford: Oxford University Press, 2007

TOLA, JOSÉ – INFIESTA, EVA. *Atles d'astronomia*. 1a ed., Barcelona: Parramón, 2001

REES, MARTIN. *Universo*. 1A de., Madrid: Pearson Alhambra, 2006 (colección: La guía visual definitiva)

MENDIOLAGOITIA, ÁLEX. *¿Cómo hacer una observación lunar?* Revista *Astronomía*. II Época – Año XXVII – Nº 154.

AGRUPACIÓ D'ASTRONOMIA I CIÈNCIA DEL PLA DE L'ESTANY. *El butlletí d'Astrobanyoles*. Nº 2 – octubre 2011

10. Apéndices

10.1. Apéndice 1: Complemento de óptica

Refracción y reflexión

Para conocer las lentes y los espejos, es necesario introducir estos dos términos. La *reflexión* es el cambio de dirección de un rayo o una onda que ocurre en la superficie que separa dos medios, regresando así al medio inicial. La *refracción* en cambio, consiste en la modificación de la trayectoria de una onda, al atravesar la superficie que delimita dos medios. Además en este último caso, también varía la velocidad de propagación de la onda.

Imagen virtual y real

Finalmente es preciso diferenciar entre *imágenes reales* e *imágenes virtuales*. Una imagen virtual es la que se forma por reflexión en un espejo plano, por lo que los rayos no se concentran en un solo punto. En cambio en una imagen real los rayos pasan realmente por un solo punto, y suelen ser formadas por espejos cóncavos o lentes.

Lentes

Las lentes son objetos, normalmente de vidrio, limitados por dos superficies al menos una de las cuales es curva. Así, una onda incidente se *refracta* atravesando el material del que está hecho la lente, lo cual le permite formar una imagen. Para analizar las lentes y la imagen que forman, antes debemos conocer algunos términos. Veamos el siguiente dibujo:

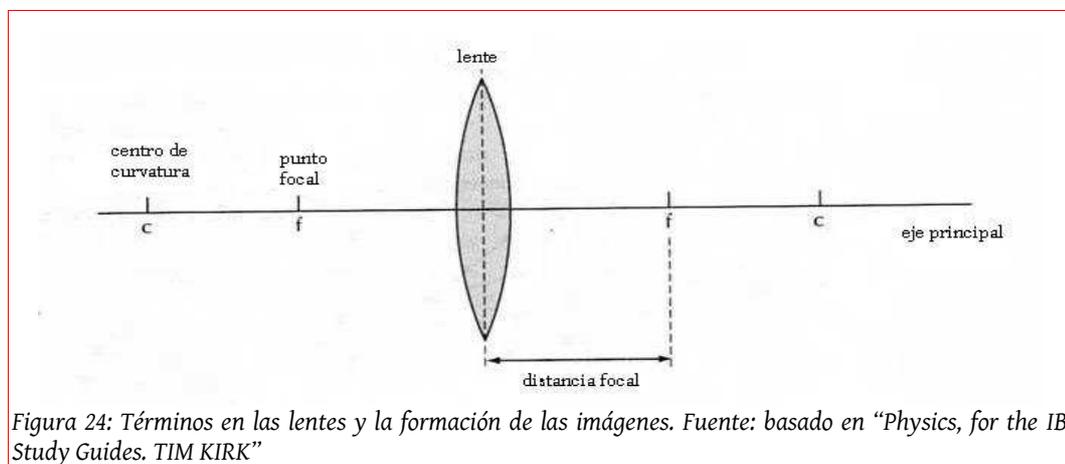
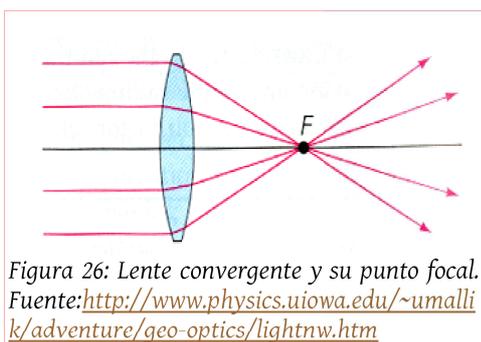
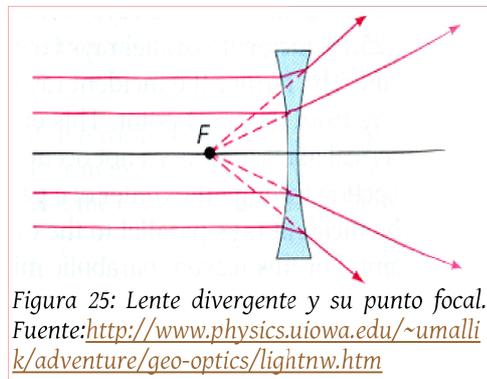


Figura 24: Términos en las lentes y la formación de las imágenes. Fuente: basado en "Physics, for the IB Study Guides. TIM KIRK"

- El *centro de curvatura*, c , es el centro de la esfera que forma cada curvatura de la lente.
- El *eje principal* (o eje óptico) es una línea que une, en teoría, los dos centros de curvatura y que pasa por el centro de la lente.
- El *punto focal imagen*, f , es el punto situado en el eje principal donde se forma la imagen de un objeto situado al infinito después de pasar por la lente. El del otro lado de la lente, se le llama *punto focal objeto*.
- La *distancia focal*, es la distancia que hay entre el centro de la lente y el punto focal.

Existen dos tipos de lentes: las convergentes y las divergentes. A diferencia de esto, las **lentes divergentes** son más gruesas en los extremos que en el centro, y refractan los rayos de manera que estos salen en distintas direcciones, tienen la propiedad de divergir los rayos. En este caso el punto focal es anterior a la lente, ahí donde las prolongaciones de las refracciones de los rayos de luz se encuentran. Se usan para obtener imágenes disminuidas, y para corregir la miopía, ya que estas personas forman la imagen antes de la retina a causa del gran poder refractivo, y así la lente divergente hace que puedan enfocar bien.



Las **lentes convergentes** son más gruesas en el centro que en los extremos, y lo que hacen es refractar rayos paralelos de ondas hacia el mismo punto, el punto focal. Son utilizadas para ampliar las imágenes (como las lupas) y por ejemplo para corregir la hipermetropía, ya que estas personas forman la imagen después de la retina y así la lente convergente hace que la imagen se forme antes.

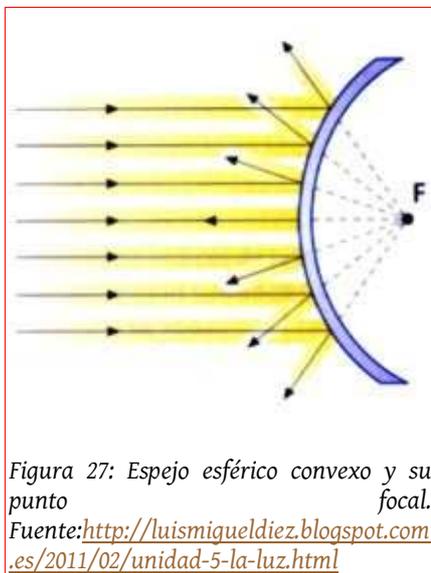
Espejos

Un espejo es una superficie pulida, normalmente de vidrio, en la cual la luz incidente se refleja con muy poca dispersión. Pueden ser planos o esféricos (cóncavos o convexos).

Hablando de los **espejos planos**, si colocamos un objeto delante, se formará una imagen. Este proceso ocurre ya que del objeto salen a todas direcciones haces de luz. Cada rayo que incide sobre del espejo, se reflejará siguiendo las leyes de reflexión²⁵, y estos rayos serán percibidos por el observador. Así, trazando el diagrama, encontramos que la imagen que se forma es virtual, está a la misma distancia detrás del espejo que el objeto de delante, es directa (no invertida), es de la misma medida que el objeto y está invertida lateralmente.

Los **espejos esféricos convexos**, tienen la propiedad de divergir los rayos de luz, es decir los envían a todas direcciones. Así pues, el punto focal imagen es virtual ya que está detrás del propio espejo, y es la prolongación de las refracciones de los rayos. En estos espejos la imagen siempre será menor que el objeto real, directa y virtual. Se utilizan por ejemplo en los retrovisores de los automóviles.

Finalmente los **espejos esféricos cóncavos** hacen que todos los rayos que inciden sobre él vayan a un mismo punto, el punto focal imagen. La formación de la imagen dependerá de la distancia a la que se encuentre el objeto, ya que tanto puede ser real como virtual, directa o invertida, y mayor menor o igual que la medida del objeto.



²⁵ **1ª ley: el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal, se encuentran en un mismo plano. 2ª ley: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.**

Formación de imágenes

Centrándonos en los telescopios refractores (el utilizado en el telescopio *Takahashi Toa 150*), es preciso saber como se forma la imagen a partir de las lentes. Esta imagen formada depende de donde esté situado el objeto que queremos observar. Así pues variará si el objeto se encuentra: muy lejano, exactamente al doble que la distancia focal, entre el doble de la distancia focal y la distancia focal, a la distancia focal, o más cerca que la distancia focal. Solo voy a explicar como se forma la imagen en el caso de que el objeto sea muy lejano, ya que para observar la Luna es el único caso que nos interesa.

Tenemos que saber como se refracta cada rayo: los rayos que vayan paralelos al eje principal o simplemente en dirección a este (sin pasar por el centro óptico), se refractaran hacia el punto focal, los rayos que vayan directamente hacia el punto focal, se refractaran paralelamente del eje principal, y los que pasen por el centro óptico no sufren desviación.

En el caso de que el objeto esté muy lejos (como la Luna), se formará una *imagen real, menor e invertida*. Como vemos este es el diagrama:

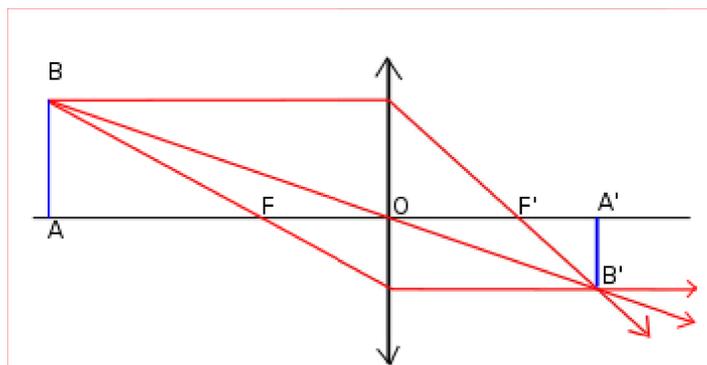
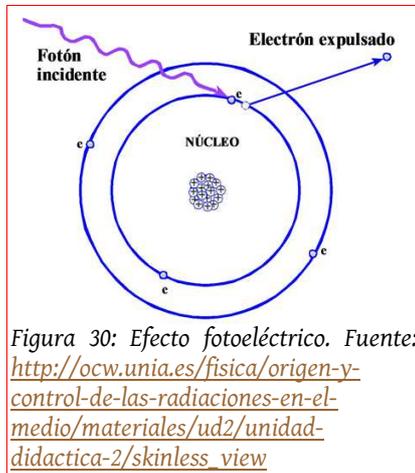


Figura 29: Formación de la imagen a partir de una lente convergente, de un objeto que está más lejos que el doble de la distancia focal

Fuente: <http://es.wikibooks.org/wiki/F%C3%ADsica/%C3%93ptica/Lentes>

10.2. Apéndice 2: Efecto fotoeléctrico



En el año 1887, H.Hertz²⁶ descubrió que al incidir una radiación electromagnética sobre una superficie metálica se desprenden electrones. Este fenómeno se conoció con el nombre de *efecto fotoeléctrico*. De todas formas, hay unas ciertas condiciones para que se desprendan electrones, ya que se produce solo si la frecuencia de radiación es mayor a una frecuencia linder, f_0 , distinta para cada metal. Además, los electrones emitidos tienen una energía cinética, E_c , que aumenta solo con la frecuencia de radiación, no con la intensidad.

En el año 1905, A.Einstein²⁷ propuso que la luz estaba formada de “paquetes” de energía, los *fotones*, los cuales no tenían masa pero sí cantidad de movimiento. Dijo que los electrones de la superficie necesitan una cierta energía, W_0 (*energía linder del metal*) para escapar de la atracción de los núcleos. Partiendo de la fórmula de M.Planck²⁸ sobre la energía de los fotones, Einstein dedujo que un fotón (de frecuencia f y energía hf) al incidir sobre una superficie, cede toda su energía a un electrón. Esta energía absorbida por el electrón, si es mayor que la energía linder del metal, hará que el electrón se escape de la superficie del metal, y además, la energía extra, la utilizará para incrementar su energía cinética. Por lo que Einstein dedujo que la energía de un fotón (hf) es igual a la energía linder del metal (W_0) más la energía cinética que obtiene el electrón (E_c)²⁹. Por eso se consideró la luz como una dualidad onda-partícula.

²⁶ Heinrich Hertz, (Hamburgo, 22 de febrero de 1857 – Bonn, 1 de enero de 1894).

²⁷ Albert Einstein, (Ulm, Alemania, 14 de marzo de 1879 – Princeton, Estados Unidos, 18 de abril de 1955).

²⁸ Max Planck, (Kiel, Alemania, 23 de abril de 1858 – Gotinga, Alemania, 4 de octubre de 1947). Fórmula de la energía de los fotones: $E = h \cdot f$ donde h : constante de Planck $h = 6,625 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

²⁹ $h \cdot f = W_0 + E_c$

10.3. Apéndice 3: Fotografías de la Luna por partes

Las siguientes imágenes son las que saldrán en la página web, ya que para ampliar la imagen grande de la Luna, se deberá seleccionar un sector, y a partir de estos, los relieves saldrán identificados mediante un enlace para cada uno.

Las zonas de la Luna creciente son:



Figura 34: Luna creciente, zona 1



Figura 33: Luna creciente, zona 2



Figura 32: Luna creciente, zona 3



Figura 31: Luna creciente, zona 4



Figura 35: Luna creciente, zona 5



Figura 37: Luna creciente, zona 6



Figura 38: Luna creciente, zona 7



Figura 36: Luna creciente, zona 8

Y las zonas de la Luna menguante:



Figura 39: Luna menguante, zona 1



Figura 40: Luna menguante, zona 2



Figura 41: Luna menguante, zona 3

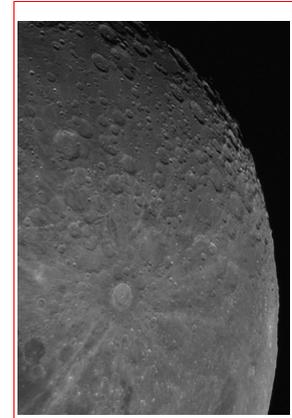


Figura 42: Luna menguante, zona 4



Figura 43: Luna menguante, zona 5

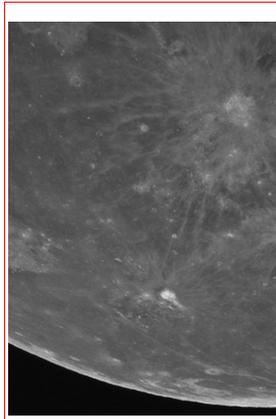


Figura 45: Luna menguante, zona 6

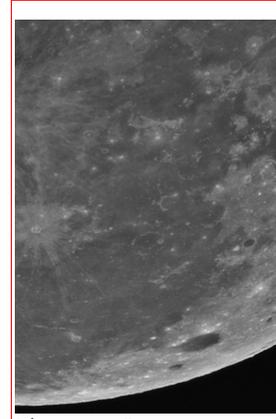


Figura 44: Luna menguante, zona 7



Figura 46: Luna menguante, zona 8

10.4. Apéndice 4: Situación de los cráteres calculados

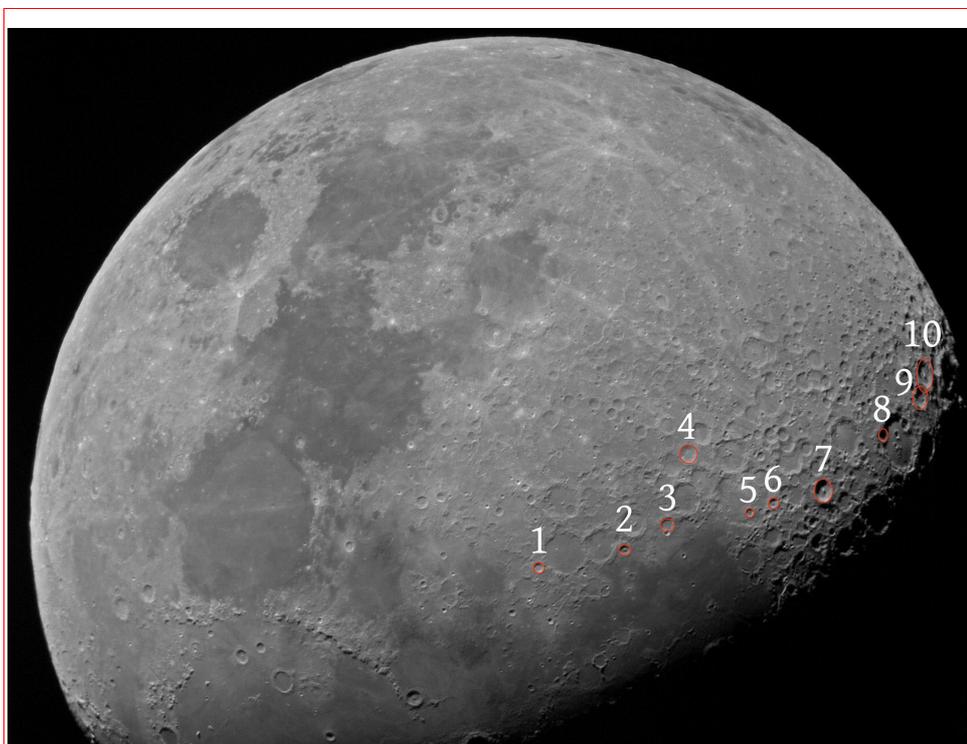


Figura 47: Cráteres calculados en las tablas 2 y 3. Luna creciente



Figura 48: Cráteres calculados en las tablas 2 y 3. Luna menguante

10.5. Apéndice 5: Cálculo de las alturas corrigiendo la curvatura de la Luna

Ejemplo de unas prácticas del Departamento de Astrofísica de la Universidad de la Laguna, donde tienen en cuenta la curvatura de la Luna.

4.2 Cálculo del tamaño real

Aunque nos parezca que la Luna es un disco sobre el fondo del cielo, se trata de un cuerpo tridimensional, una esfera (en primera aproximación). Por lo tanto, las variaciones angulares de las estructuras NO tendrán un tamaño igual en su centro o en su borde: nos parecerán más pequeñas en los bordes. Para calcular el tamaño real tendremos que corregir, por tanto, la **curvatura** de la Luna. Se puede hacer aplicando la siguiente relación:

$$\text{corrección curvatura} = \frac{1}{\cos \lambda \times \cos \beta} \quad (4)$$

donde λ y β son las coordenadas lunares (en grados) del objeto que estemos estudiando, longitud lunar y latitud lunar. Estos parámetros se pueden conocer usando un atlas. En realidad, la ecuación (4) no es del todo correcta. Supone que la Tierra está en el cénit en la posición (0,0) de la Luna, pero esto no es así. En realidad, se aparta unos pocos grados, aunque esa variación cambia con el tiempo debido a los movimientos del sistema Tierra-Luna. El punto de la superficie lunar en el que la Tierra se encuentra justo en el cénit se llama **punto sub-terrestre**. Suele venir en programas de planetario o en tablas de efemérides. La corrección de curvatura se tendría que escribir, entonces, como:

$$\text{corrección curvatura} = \frac{1}{\cos(\lambda - \lambda') \times \cos(\beta - \beta')} \quad (5)$$

donde λ' y β' son las coordenadas lunares (en grados) del punto sub-terrestre.

Por lo tanto, el tamaño de una estructura sobre la superficie será:

$$L = \frac{L'}{\cos(\lambda - \lambda') \times \cos(\beta - \beta')} = \frac{n^\circ \text{ píxeles} \times x}{\cos(\lambda - \lambda') \times \cos(\beta - \beta')} \quad (6)$$

4.3 Cálculo de la altura de una montaña lunar

Usaremos un método aproximado, pero bastante preciso. En la *Figura 3* se encuentran esquematizados los elementos básicos del problema. Necesitamos conocer la altura del Sol sobre el horizonte, α , en las coordenadas lunares de nuestra montaña. Con esta altura, usando trigonometría sencilla, se deriva directamente la altura, h , de la montaña. Para calcular α necesitamos conocer, además del tamaño real, L , de la sombra:

- La **longitud y latitud lunar**, λ y β , de la montaña o pico del que vamos a calcular su altura.

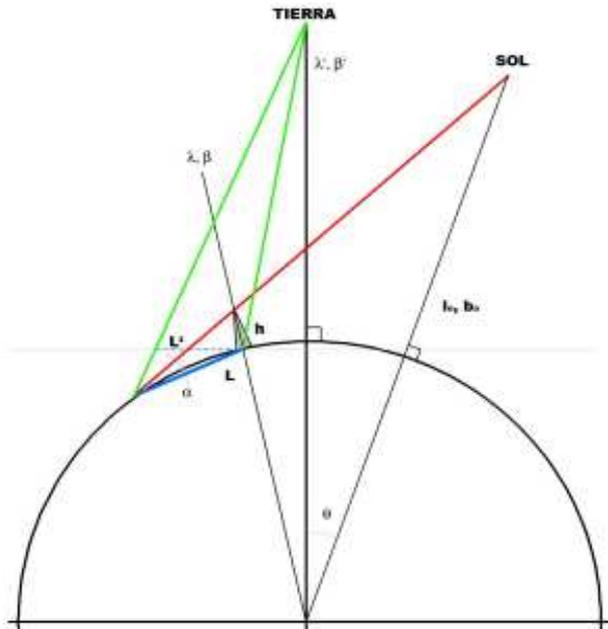


Figura 3. Esquema básico para calcular la altura, h , de una montaña sobre la Luna conociendo la longitud de su sombra, L , una vez corregida por curvatura (L'). λ y β son las coordenadas de la montaña de la Luna, λ' y β' las coordenadas del punto sub-terrestre y l_0 y b_0 las coordenadas del punto sub-solar. α es la altura del Sol desde la montaña lunar a estudiar.

- Las coordenadas del **punto sub-terrestre**, λ' y β' , el punto de la Luna en el que se tiene a la Tierra justo en el cenit
- Las coordenadas **del punto sub-solar**, l_0 y b_0 , el lugar de la Luna en el que se tiene al Sol justo en el cenit. l_0 está relacionada con la *colongitud selenográfica* del Sol, Co , que suele venir en las efemérides, de la forma $Co = 90^\circ - l_0$. La *colongitud selenográfica* del Sol es la longitud lunar del terminador matutino, esto es, la longitud lunar *por la que está saliendo el Sol*.

Con esto, la altura del Sol sobre el horizonte en nuestra montaña es:

$$\alpha = \arcsen[\sen\beta \times \sen b_0 + \cos\beta \times \cos b_0 \times \sen(Co + \lambda)] \quad (7)$$

Por lo tanto, la altura h de la montaña de la Luna será, simplemente:

$$h = L \times \tan\alpha \quad (8)$$

Pero esta ecuación sólo sería válida si las tres direcciones básicas del problema (dirección de la posición de la montaña - centro de la Luna, dirección centro de la Tierra – centro de la Luna y dirección centro de la Luna – Sol) estuviesen en el mismo plano, como ocurre en la *Figura 3*. En realidad, esto tampoco ocurre, aunque se desvían poco. Sería necesario conocer, entonces, el ángulo, θ , formado entre la Tierra y el Sol si miráramos desde el centro de la Luna:

$$\theta = \arccos[\sen\beta' \times \sen b_0 + \cos\beta' \times \cos b_0 \times \cos(\lambda' - l_0)] \quad (9)$$

transformándose la ecuación (8) en

$$h = L \times \frac{\sen\alpha}{\sen\theta} - \frac{L^2}{2R_L} \frac{\cos^2\alpha}{\sen^2\theta} \quad (10)$$

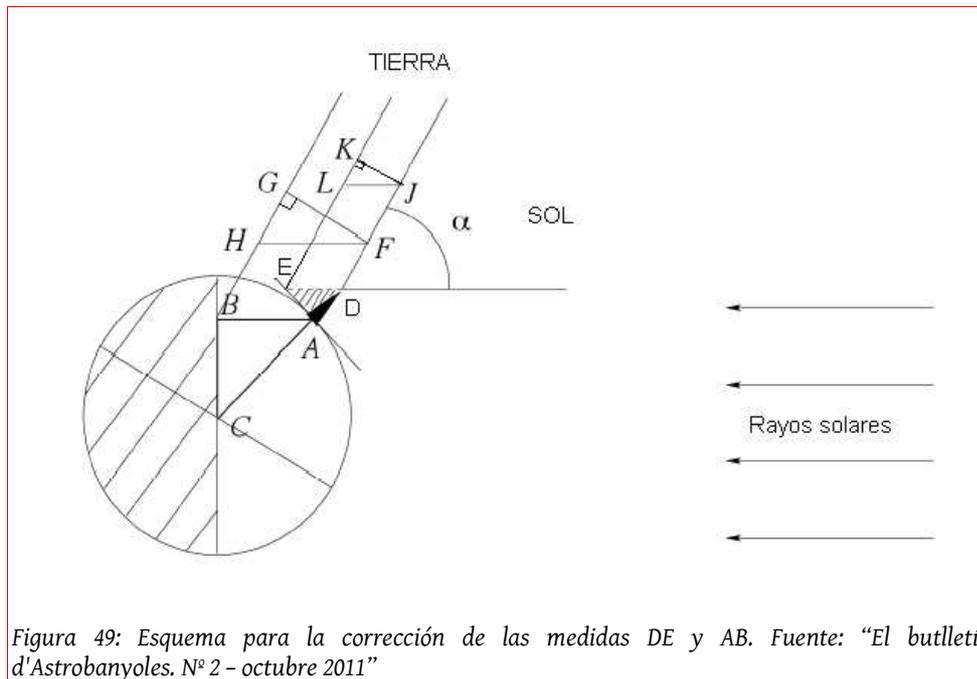
donde R_L es el radio de la Luna, 1734 km.

10.6. Apéndice 6: Cálculo de las alturas teniendo en cuenta el ángulo Tierra-Luna-Sol

Este cálculo de las alturas de un relieve teniendo en cuenta el ángulo Tierra-Luna-Sol está inspirado en el artículo publicado en la revista “El butlletí d’Astrobanyoles. Nº2 – octubre 2011” de la Agrupación Astronómica de Banyoles.

Como he comentado en las conclusiones, el ángulo Tierra-Luna-Sol influye a la hora de calcular la altura de un relieve. Una posible mejora del estudio sería tener en cuenta este factor, por lo que seguidamente voy a explicar cómo se podría hacer (siguiendo el ejemplo de la fórmula del método 1):

Hemos explicado en la página 26 que la sombra que vemos desde la Tierra es la zona que va de la cima del relieve hasta la superficie lunar (ED). Cuando el ángulo Tierra-Luna-Sol es de 90° (Luna en cuarto creciente o menguante), veríamos realmente ED, pero si el ángulo es inferior (como en la figura 49), en realidad veríamos KJ. Igualmente para la distancia al terminador, que en 90° veríamos BA, y en un ángulo inferior, GF.



Veamos como podríamos tener en cuenta este factor.

Si el ángulo Tierra-Luna-Sol, vale α , los ángulos GHF y KLJ también serán α (ya que todos están delimitados por rectas paralelas). Así pues, se verifica que:

$$\sin \alpha = \frac{GF}{HF} = \frac{KJ}{LJ}$$

Y despejando lo que son la distancia al terminator real (BA que es lo mismo que HF) y la sombra real (ED que es lo mismo que LJ), encontramos que:

$$BA = HF = \frac{GF}{\sin \alpha}$$

$$ED = LJ = \frac{KJ}{\sin \alpha}$$

Ahora, sustituimos estas dos igualdades en la fórmula del método 1, que encontramos para calcular la altura de la montaña (ver p.28), la cual era la siguiente:

$$DA = \frac{ED \cdot BA}{CA} = \frac{\frac{KJ}{\sin \alpha} \cdot \frac{GF}{\sin \alpha}}{CA} = \frac{KJ \cdot GF}{CA \cdot \sin^2 \alpha}$$

Y sustituyendo los segmentos por sus significados

$h=DA$; $s=KJ$ (ED en el caso de 90°); $d=GF$ (BA en el caso de 90°); $r=CA$:

$$h = \frac{s \cdot d}{r \cdot \sin^2 \alpha}$$

Así pues, si hacemos la fotografía de la Luna en cuarto creciente o cuarto menguante, el ángulo Tierra-Luna-Sol será de 90° , por lo que: $\sin^2 90 = 1$

Y por lo tanto, la fórmula quedaría tal como lo habíamos descrito en el estudio (ver p.28). Pero si no estamos en cuarto creciente o cuarto menguante, el ángulo no será de 90° , por lo que su seno siempre será inferior a 1. La sombra que veremos desde la Tierra (KJ) será más pequeña que la real (ED=LJ), ya que LJ es la hipotenusa del triángulo rectángulo mientras que KJ es un cateto. Lo mismo pasa con la distancia al terminator. Por eso:

$$KJ < ED \quad \text{y} \quad GF < BA$$

Y como que el seno es más pequeño que 1 y está en el denominador, el resultado de la fórmula (la altura real de la montaña) será el mismo (se compensa, prácticamente la medición más pequeña de la sombra y distancia, con el valor del seno del ángulo).